Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 08   17/10/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

SERIE   Le serie sono particolari successioni

Dato (x_n) successione in X chiamo

- "SOMME PARZIALI" le $S_n := x_1 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$
- "SERIE degli x_n" la successione (S_n) delle somme parziali
- "SOMMA DELLA SERIE degli x_n" il limite (SE ESISTE) delle S_n

INDICO con $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ LA SOMMA DELLA SERIE

ma anche (abuso di linguaggio) la serie (S_n).

DICO che la serie è sommabile o convergente se

$$\left(\sum_{1}^{\infty} x_n = \right) \lim_{n} S_n \quad \text{esiste in } X$$

TUTTO QUESTO SI PUÒ FARE NON APPENA C'È UNA NORMA IN X

FUNZIONI CONTINUE

1.5.1 Definizione (continuità)**.** Siano $\mathbb{X}$ e $\mathbb{X}_1$ due spazi normati con norme $\| \ \|$ e $\| \ \|_1$ rispettivamente. Sia $A \subset \mathbb{X}$ e $\mathbf{f} : A \to \mathbb{X}_1$, e sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Si dice che $\mathbf{f}$ è *continua in* $\mathbf{x}_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0 \text{ tale che } \forall \mathbf{x} \in A \text{ con } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r \text{ si ha } \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|_1 < \varepsilon.$$

Si vede subito che se $\mathbf{x}_0$ è un punto isolato di A qualunque funzione è continua in $\mathbf{x}_0$: basta prendere $r > 0$ in modo che $A \cap B(\mathbf{x}_0, r)$ contenga solo $\mathbf{x}_0$. Se invece $\mathbf{x}_0$ è di accumulazione è facile vedere che $\mathbf{f}$ è continua in $\mathbf{x}_0$ se e solo se

$$\lim_{x \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Continuità e successioni

1.5.2 Osservazione (caratterizzazione della continuita mediante successioni). Sia $f : A \to \mathbb{X}_1$ e sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Allora $\mathbf{f}$ è continua in $\mathbf{x}_0$ se e solo se:

$$\text{per ogni } (\mathbf{x}_n) \text{ successione in } A \text{ con } \mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0 \text{ si ha } \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Infatti se $\mathbf{x}_0$ è isolato non c'è niente da dimostrare (si noti che se $\mathbf{x}_n \in A$ e $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ allora $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$ per n grande, per cui $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ per gli stessi n). Se invece $\mathbf{x}_0$ è di accumulazione si usa la corrispondente caratterizzazione del limite con $\mathbf{l} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

PROPRIETÀ (senza dim.)

1.5.3 Teorema. *Siano $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ normati, $A \subset \mathbb{X}$ e $\mathbf{x}_0 \in A$. Valgono i fatti seguenti.*

- *Se $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \to \mathbb{X}_1$ sono continue in $\mathbf{x}_0$, allora la somma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ è continua in $\mathbf{x}_0$.*
- *Se $\mathbf{f} : A \to \mathbb{X}_1$ e $g : A \to \mathbb{R}$ sono continue in $\mathbf{x}_0$, allora il prodotto $g\mathbf{f} : A \to \mathbb{X}_1$ è continuo in $\mathbf{x}_0$.*
- *Se $\mathbf{f} : A \to B \subset \mathbb{X}_1$ è continua in $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{g} : B \to \mathbb{X}_2$ è continua in $\mathbf{y}_0 := \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, allora la composizione $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : A \to \mathbb{X}_2$ è continua in $\mathbf{x}_0$.*
- *Se $\mathbf{f} : A \to \mathbb{X}_1$ è continua in $\mathbf{x}_0$ e se $\mathbf{x}_0 \in B \subset A$, allora la* restrizione *$\mathbf{f}|_B : A_1 \to \mathbb{X}_1$ è continua in $\mathbf{x}_0$.*
- *$\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^N$ è continua in $\mathbf{x}_0$ se e solo se tutte le sue* componenti *$f_i : A \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, N)$ sono continue in $\mathbf{x}_0$.*

- *Per ogni $i = 1, \ldots, N$ la* proiezione *i-esima $\mathbf{x} \mapsto x_i$ è continua.*

- Se $\mathbb{X}_1 = \mathbb{R}$, f è continua in x_0 e $f(x_0) \neq 0$ allora $1/f$ è continua in x_0 (si può dedurre dalla proprietà di composizione: $1/f = g \circ f$ dove $g(t) = 1/t$)

ESEMPIO $\quad f(x,y) = \dfrac{e^{xy} + x^2}{1 + x^2 + 3y^2}$ è continua

in quanto

(1) $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto y$ sono continue (le proiezioni)

(2) $(x,y) \mapsto xy$ $\quad (x,y) \to x^2$, $(x,y) \to 3y^2$

sono continue (prodotti)

(3) $(x,y) \mapsto e^{xy}$ è continua (e^t è continua)

(4) $(x,y) \mapsto e^{xy} + x^2$ $\quad (x,y) \mapsto 1 + x^2 + 3y^2$

sono continue (somme)

(5) f è continua (quoziente)

← o $\mathbb{N}$ * di dimensione finita

1.5.11 Teorema (Weierstrass). *Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato e chiuso. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo, cioè esistono x' e x'' in A tali che*

$$f(x') \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq f(x'') \qquad \forall x \in A.$$

Dim. Vediamo l'esistenza di x''. Premettiamo un fatto generale

Lemma Se $f : A \to \mathbb{R}$ esiste una successione (x_n) in A tale che $f(x_n) \to \sup_{x \in A} f(x)$

Dim Ci sono due casi da trattare.

(1) $M := \sup_{x \in A} f(x) \in \mathbb{R}$. In questo caso M è caratterizzato dalle due proprietà:

(i) $M \geq f(x) \quad \forall x \in A$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in A : f(x) \geq M - \varepsilon$

Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo prendere $\varepsilon = 1/n$ e trovare, per (ii), un punto $x_n \in A$ t.c.

$f(x_n) \geq M - 1/n$. D'altro canto, per (i), $f(x_n) \leq M$.

La successione (x_n) così costruita verifica

$f(x_n) \to M$ (per i carabinieri)

(2) $M = +\infty$. Questo significa che

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \exists\, x \in A : f(x) \geq c.$$

Allora dato $n \in \mathbb{N}$ trovo $x_n \in A : f(x_n) \geq n$ e ho trovato una successione (x_n) per cui $f(x_n) \to +\infty$

#

Vedremo la dim. di Weierstrass. (per il max)

- Prendiamo (x_n) in A tale che

$$f(x_n) \to \sup_{x \in A} f(x)$$

- Dato che A è limitato, (x_n) è limitata dunque esiste un'estratta (x_{n_k}) tale che

$$x_{n_k} \to x'' \qquad \text{per } x'' \in X$$

- Dato che A è chiuso $\Rightarrow x'' \in A$

- Dato che f è continua in A, dunque in x'', si ha

$$f(x_{n_k}) \to f(x'')$$

- Dato che (x_{n_k}) è estratta da (x_n) ho ancora

$$f(x_{n_k}) \to \sup_{x \in A} f(x)$$

- Per l'unicità del limite $f(x'') = \sup_{x \in A} f(x)$.

e quindi $\quad f(x) \leq f(x'') \quad \forall x \in A.$ #

1.5.13 Teorema (Weierstrass generalizzato). *Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che:*

(a) *Se $x_0 \in \partial A$ ma $x_0 \notin A$ allora:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{ risp. } -\infty);$$

(b) *Se A non è limitato, allora:*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty \quad (\text{ risp. } -\infty).$$

Allora f ammette minimo (risp. f ammette massimo). Notiamo che se A è limitato e chiuso le (a) *e* (b) *sono automaticamente verificate (in entrambe le versione) e quindi si riottiene il teorema di Weierstrass.*

<u>Dim.</u> Si fa ~~come~~ in Weierstrass partendo da

~~una successione (x_n) in A tale che $f(x_n) \to \inf_{x \in A} f(x)$~~
~~(stavolta faccio il minimo). Notiamo che $\inf_{x\in A} f(x)$ non può~~
~~essere $+\infty$ (è minore o eguale un qualunque $f(x) < +\infty$)~~

- ~~Dico che (x_n) è LIMITATA. Se non lo fosse troverei un'estratta (x_{n_k}) tale che $\|x_{n_k}\| \to +\infty$. Per la (b) avrei $f(x_{n_k}) \to +\infty$. Dato che $(f(x_{n_k}))$ è estratta da $(f(x_n))$ ho $f(x_{n_k}) \to \inf f$, dunque avrei $\inf f = +\infty$ IMPOSSIBILE~~
- ~~Dato che (x_n) è limitata trovo (x_{n_k}) con $x_{n_k} \to x'$~~
- ~~Dato che A è chiuso $x' \in A$.~~
- ~~A questo punto vado avanti come nella dim. di Weierstrass e trovo che $f(x') = \inf f \iff$~~
~~x' è pto di minimo per f.~~

ESEMPIO $\quad f(x,y) = e^{x^2+y^2} - x + y$

ha minimo perchè $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} = +\infty$. Infatti:

$$x - y \leq |x| + |y| \leq \frac{1}{2} + x^2 + \frac{1}{2} + y^2 = 1 + x^2 + y^2 \quad \text{e dunque}$$

$$f(x,y) \geq e^{x^2+y^2} - x^2 - y^2 - 1$$

Ma la funzione $g(t) = e^{t^2} - t^2 - 1$ tende a $+\infty$ se $t \to +\infty$

e dunque $e^{x^2+y^2} - x^2 - y^2 - 1 \to +\infty$ se $\|(x,y)\| \to +\infty$

Notiamo che il valore minimo è < 0 in quanto $f(t,-t) = e^{2t^2} - 2t$ ha derivata -2 in $t=0$ dunque è <0 per $t>0$ piccolo.

FATTO GENERALE SULLE FRONTIERE

$$x_0 \in \partial A \iff \begin{cases} \text{Esistono due successioni } (x_n) \text{ e } (\tilde{x}_n) \\ \text{con } x_n \in A,\ \tilde{x}_n \in \complement A \text{ e} \\ x_n \to x_0 \quad \tilde{x}_n \to x_0 \end{cases}$$

CONTINUA

ESEMPIO Se N, M sono interi indico

$$\mathcal{M}(M,N) = \{ \text{matrici } M \times N \}$$

È noto che se $A \in \mathcal{M}(M,N)$ e $x \in \mathbb{R}^N \Rightarrow Ax \in \mathbb{R}^M$

È chiaro che $X = \mathcal{M}(M,N)$ è uno spazio vettoriale. Potrei vedere X come un $\mathbb{R}^{MN}$ (mettendo in un'unica fila tutte le righe). IN QUESTO MODO ho la norma

$$\| A \|_2 = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$$

e con essa una NOZIONE DI LIMITE che rende sensate tutte le definizioni viste.

- Si vede subito che $A_n \longrightarrow A \iff (a_n)_{ij} \to a_{ij}$
- IN REALTÀ È PIÙ UTILE (SPESSO) USARE LA NORMA

$$\| A \| := \max \left\{ \frac{\| Ax \|_{\mathbb{R}^M}}{\| x \|_{\mathbb{R}^N}} : x \neq 0 \quad x \in \mathbb{R}^N \right\} =$$

$$\max \{ \| Ax \|_{\mathbb{R}^M} : \| x \|_{\mathbb{R}^N} = 1 \} =$$

$$\min \{ C \geq 0 \text{ tali che } \| Ax \|_{\mathbb{R}^M} \leq C \| x \|_{\mathbb{R}^N} \ \forall x \in \mathbb{R}^N \}$$

Dunque $\|A\|$ verifica $\| Ax \|_M \leq \|A\| \|x\|_N \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$ ed è il più piccolo numero con tale proprietà.

FATTO $\| AB \| \leq \| A \| \, \| B \|$

PROP Le due norme introdotte ora su $X = \mathcal{M}(M,N)$ sono "equivalenti": $\exists\ K_1, K_2$ tali che
$$K_1 \|A\|_2 \leq \|A\| \leq K_2 \|A_2\| \qquad \forall A \in \mathcal{M}(M,N)$$
(NO DIM.)

QUESTO FA SÌ CHE
$$A_n \to A \quad (\text{in norma } \|\cdot\|_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$A_n \to A \quad (\text{in norma } \|\cdot\|)$$

ESEMPIO Sia A con $\|A\| < 1$. Allora $I - A$ è invertibile e
$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad (\leftarrow \text{esiste !!})$$

Dim. Ragionando come nei numeri x ho:
$$(I-A)\underbrace{(I + A + A^2 + \cdots + A^n)}_{S_n} = (I + A + \cdots + A^n) - (A + A^2 + \cdots A^{n+1})$$
$$= I - A^{n+1}$$

Inoltre $\|S_n\| = \left\| \sum_{i=0}^{n} A^i \right\| \leq \sum_{i=0}^{n} \|A^i\| \leq \sum_{i=0}^{n} \|A\|^i = \dfrac{1}{1-\|A\|^{n+1}}$

Essendo $\|A\| < 1$ ottengo che (S_n) è limitata !!

Dunque esiste un'estratta S_{n_k} con $S_{n_k} \to S$

Sempre per il fatto che $\|A\| < 1 \Rightarrow \|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0$ dunque $I - A^{n+1} \to I$. Andando al limite:
$$(I-A)S = I \qquad \text{dunque } S = (I-A)^{-1}$$

Si può vedere ora (ma lo tralasciamo) che tutta la S_n tende a S (non solo la sottosuccessione) e dunque
$$S = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$