Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 07 12/10/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Proprietà dei "limiti infiniti"

- *se* $f(\mathbf{x}) \to +\infty$ *e* $g(\mathbf{x}) \to +\infty$ *allora* $(f+g)(\mathbf{x}) \to +\infty$;
- *se* $f(\mathbf{x}) \to -\infty$ *e* $g(\mathbf{x}) \to -\infty$ *allora* $(f+g)(\mathbf{x}) \to -\infty$;
- *se* $f(\mathbf{x}) \to +\infty$ *e* $g(\mathbf{x}) \to l > 0$ $(l < 0)$ *allora* $(fg)(\mathbf{x}) \to +\infty$ $(-\infty)$;
- *se* $f(\mathbf{x}) \to -\infty$ *e* $g(\mathbf{x}) \to l > 0$ $(l < 0)$ *allora* $(fg)(\mathbf{x}) \to -\infty$ $(+\infty)$;
- *se* $f(\mathbf{x}) \to +\infty$ $(-\infty)$ *allora* $1/f(\mathbf{x}) \to 0^+$ (0^-); $\rightleftarrows$ ⊙
- *se* $f(\mathbf{x}) \to 0^+$ (0^-) *allora* $1/f(\mathbf{x}) \to +\infty$ $(-\infty)$;

$f(x) \to l \quad g(x) \to +\infty / -\infty$
$\Rightarrow (f+g)(x) \to +\infty / -\infty$

⊙ INTENDIAMO CHE $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l^+$ se $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$ e $f(x) > l$ per x vicino a x_0

∘ (MONOTONIA) Se $f(x) \geq g(x)$ allora

$g(x) \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$

$f(x) \to -\infty \Rightarrow g(x) \to -\infty$ $\quad (x \to x_0)$

[SONO ESCLUSI I CASI $+\infty - \infty$ $\quad 0 \cdot \pm\infty$ (FORME INDETERMINATE) CHE VANNO FATTE CASO PER CASO]

SUCCESSIONI

X spazio vett. con una norma $\|\ \|$

Chiamo <u>successione in X</u> (successione di punti di X)

una funzione $a: \mathbb{N} \to X$. SI USA SCRIVERE

a_n invece di $a(n)$ $\qquad$ (a_n) invece di a

valore della succ. in n, valore n-esimo $\qquad$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- IN REALTÀ considero anche $(a_n)_{n \geq n_0}$ $\left(a_n = \dfrac{1}{n-5} \quad \forall n \geq 6 \right)$

- È DEFINITA LA NOZIONE DI LIMITE ($n \to +\infty$) di (a_n) che in questo caso diventa: (IN NON HA PTI DI ACCUMULAZIONE. IN è ILLIMITATO $\Rightarrow$ posso fare $\lim_{n\to+\infty}$)

$$\ell \in X \qquad \ell = \lim_{n \to +\infty} a_n \qquad \text{se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n}, n \in \mathbb{N} \text{ si ha } \| a_n - \ell \| < \varepsilon$$

- TUTTE LE PROPRIETÀ DEI LIMITI VALGONO.

<u>TEOREMA</u> (legame tra limiti di funzioni e successioni)

X e X_1 due spazi, con delle norme $\| \ \|$ e $\| \ \|_1$.

$A \subset X$ $\quad$ x_0 di accumulazione per A.

$f: A \to X_1$ $\qquad$ $\ell \in X_1$

(a) x_0 è di occ. per A $\iff$ esiste una successione (x_n) in A tale che $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$

(CONVENZIONE $x_n \to x_0$ significa $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$)

(b) Sono fatti equivalenti

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(2) Per ogni successione (x_n) in A con $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ si ha $f(x_n) \to \ell$

OSS. (1) ⇒ (2) segue dal teorema di composizione
(2) ⇒ (1) non è ovvio

OSS. Il teorema può essere utile per dimostrare che il limite non esiste.
Per esempio la funzione $f(x,y) = \dfrac{\sin(x+y)}{x-y}$

non ha limite (l'abbiamo visto ieri) perché posso prendere

$P_n = (1/n, 0)$ e $Q_n = (0, 1/n)$
(P_n) (Q_n) hanno valori in $A = \{(x,y) : x \neq y\}$ → dominio di f

$\lim_{n\to\infty} P_n = (0,0) = \lim_{n\to\infty} Q_n$ MA

$f(P_n) = \dfrac{\sin(1/n)}{1/n} \to 1$

$f(Q_n) = \dfrac{\sin(1/n)}{-1/n} \to -1$

SONO DIVERSI ⇓ $\nexists$ limite

\#

Def. Se (a_n) è una successione, chiamo sottosuccessione (o successione estratta) di (a_n) una $b_n = a_{k_n}$ dove (k_n) è una successione strettamente crescente di interi.

Per esempio se $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ allora $b_n = \dfrac{1}{4n^2}$ è estratta da a_n perché $b_n = a_{2n}$ $(k_n = 2n)$

OPPURE $c_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{1}{4n^2+4n+1} = a_{2n+1}$

TEOREMA Se $a_n \to \ell$ allora $a_{n_k} \to \ell$ per ogni estratta (a_{n_k})

OSS. Se delle estratte hanno limite $\not\Rightarrow$ a_n ha limite

$a_n = (-1)^n$ NON HA LIMITE $a_{2n} \to 1$ $a_{2n+1} \to -1$

$\boxed{\text{BOLZANO - WEIERSTRASS}}$ Se (x_n) è una successione limitata di $\underline{\underline{\mathbb{R}^N}}$ (serve la dimensione finita!) $\Rightarrow$

$\exists\ (x_{n_k})_k$ (estratta da (x_n)) tale che x_{n_k} HA LIMITE

(LIMITATA : $\|x_n\| \leq$ costante $\forall n$)

IDEA Se per esempio siamo in $\mathbb{R}^2$ ho una successione

(x_n, y_n) $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ e so che

$(\star)$ $x_n^2 + y_n^2 \leq R^2$ $R>0$

Da $(\star)$ $\Rightarrow$ $|x_n| \leq R$ $\Rightarrow$ (B.W. in $\mathbb{R}$) $\Rightarrow \exists\, n_k : \boxed{x_{n_k} \to x}$

per un opportuno $x \in \mathbb{R}$. GUARDO LE y

Da $(\star)$ trovo anche $|y_n| \leq R$ e in particolare $|y_{n_k}| \leq R$:

$\Rightarrow$ trovo un ulteriore k_h tale che $\boxed{y_{n_{k_h}} \to y}$ per un opportuno $y \in \mathbb{R}$.

Ma allora $(x_{n_{k_h}})$ è estratta di (x_{n_k}) e dunque

$x_{n_{k_h}} \to x$. DUNQUE HO TROVATO n_{k_h} t.c.

$(x_{n_{k_h}}, y_{n_{k_h}}) \to (x, y)$

$\perp$ è estratta da (x_n, y_n)

FATTO $A \subset X$ Allora

A è chiuso $\Leftrightarrow$ Per ogni successione (a_n) in A tale che $a_n \to x \Rightarrow x \in A$

(A contiene tutti i possibili limiti di sue successioni)

Per esempio $A = \{x + y \geq 1\}$ è chiuso.

Dim. Se $(x_n), (y_n)$ sono due succ. in $\mathbb{R}$ tali che $(x_n, y_n) \in A$

cioè $x_n + y_n \geq 1$. st $(x_n, y_n) \to (x, y) \Leftrightarrow x_n \to x,\ y_n \to y$

Allora, per le proprietà dei limiti, $x + y \geq 1$ dunque $(x, y) \in A$
