Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 06 11/10/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

(*) Proprietà della norma:

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \underset{L=1}{\|x-y\|}$$

~ la funzione $n(x) := \|x\|$ è LIPSCHITZIANA (di costante 1) (LIP: $\|f(x)-f(y)\|_1 \leq L\|x-y\|$)

INFATTI la disuguaglianza sopra equivale a

$$-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

Dalla dis. triangolare ho $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow$
$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ (dis. a dx). Analogamente
$\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\| \Rightarrow -\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\|$ (dis. di sx)

LIMITE DELLE PROIEZIONI

Se $x_0 \in \mathbb{R}^N$ allora ($\hat{e}_i$ = versore i-esimo)

$$\lim_{x \to x_0} x_i = (x_0)_i \qquad i = 1 \dots N$$

OVVIA DALLA DEF.

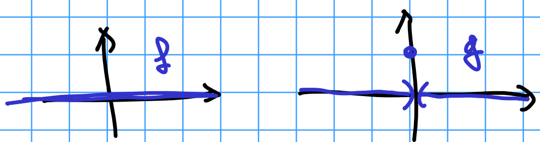
Si può anche fare come segue:

- $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ (immediato dalla def.)

• $\lim_{x\to x_0} x_i = \lim_{x\to x_0} x\cdot\hat{e}_i = = x_0\cdot\hat{e}_i = (x_0)_i$

POSSO INTRODURRE $\pi_i(x) = x_i = x\cdot\hat{e}_i$ che è la <u>proiezione</u> sull'asse i-esimo

CONTROESEMPIO A ●. tutte funzioni reali. $f(x)=0$ $\quad g(y)=\begin{cases}0 & y\neq 0\\ 1 & y=0\end{cases}$



se guardo la def. vedo che $f(x)\xrightarrow{x\to 0} 0$, $\underbrace{g(y)\xrightarrow{y\to 0} 0}$

(il limite non dipende dal valore di g in 0!!)

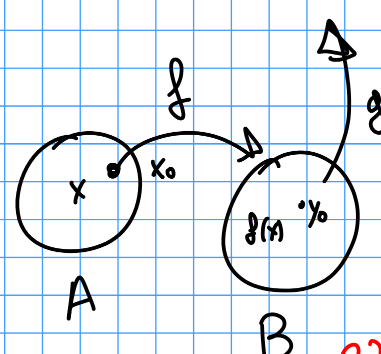
PERÒ $g(f(x)) = g(0) = 1$

e dunque $g\circ f \xrightarrow{x\to 0} 1 \neq 0$

1.3.5 Teorema. *Siano $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ spazi normati, $A\subset\mathbb{X}$, $B\subset\mathbb{X}_1$, $\mathbf{x}_0$ di accumulazione per A e $\mathbf{y}_0$ di accumulazione per B. Valgono i fatti seguenti (sottinteso che $\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0$).*

- **(linearità del limite)** *Siano $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2 : A\to\mathbb{X}_1$. Se $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})\to\mathbf{l}_1$ e $\mathbf{f}_2(\mathbf{x})\to\mathbf{l}_2$ allora $(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2)(\mathbf{x})\to\mathbf{l}_1+\mathbf{l}_2$.* ✓
- **(limite del prodotto)** *Se $f_1 : A\to\mathbb{R}$, $\mathbf{f}_2 : A\to\mathbb{X}_1$ e se $f_1(\mathbf{x})\to l_1$ e $\mathbf{f}_2(\mathbf{x})\to\mathbf{l}_2$, allora il prodotto $f_1\mathbf{f}_2(\mathbf{x})\to l_1\mathbf{l}_2$.* ✓
- *Se $\mathbf{f}_1 : A\to\mathbb{R}$, $\mathbf{f}_2 : A\to\mathbb{X}_1$, se una delle due è limitata e l'altra tende a zero, allora $\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2(\mathbf{x})\to 0$.* ✓

$l \in \mathbb{X}_2$



● → ??

- **(limite della composizione/cambio di variabile)** *Se $\mathbf{f} : A\to B$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})\xrightarrow{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{y}_0$ con $\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x})\neq\mathbf{y}_0}$ per $\mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0$, se $\mathbf{g} : B\to\mathbb{X}_2$ e $\mathbf{g}(\mathbf{y})\xrightarrow{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0}\mathbf{l}$, allora $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\xrightarrow{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{l}$.*
- **(limite della restrizione)** *Se $\mathbf{f} : A\to\mathbb{X}_1$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x})\to\mathbf{l}$, se $A_1\subset A$ e $\mathbf{x}_0$ è di accumulazione per A_1, allora la restrizione $\mathbf{f}|_{A_1} : A_1\to\mathbb{X}$ tende ancora a $\mathbf{l}$.* ✓
- **(limite e componenti)** *Se $\mathbf{f} : A\to\mathbb{R}^N$ si ha che $\mathbf{f}(\mathbf{x})\to\mathbf{l}$ se e solo $f_i(\mathbf{x})\to l_i$ dove f_i e l_i indicano l'i-esima componente di $\mathbf{f}$ e $\mathbf{l}$.* ✓

  Inoltre per ogni $\mathbf{x}'\in\mathbb{R}^N$ e ogni $i=1,\dots,N$ si ha:

  O → $$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}'} x_i = x'_i.$$

$f(g(y)) \xrightarrow{y\to y_0} l$??

- **(permanenza del segno)** *Se $f : A\to\mathbb{R}$ e $f(\mathbf{x})\to l>0$, allora esiste $\delta>0$ tale che $f(\mathbf{x})>0$ per ogni $\mathbf{x}\in A$ con $\mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0$ e $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<\delta$.* ✓
- **(monotonia del limite)** *Se $f : A\to\mathbb{R}$ e $f(\mathbf{x})\to l>0$ e se $f(\mathbf{x})\geq 0$, allora $l\geq 0$.* ✓
- **(teorema dei carabinieri)** *Se $f,g,h : A\to\mathbb{R}$, $f(\mathbf{x})\leq g(\mathbf{x})\leq h(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x}\in A$ con $\mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0$ e se $f(\mathbf{x})\to l$, $h(\mathbf{x})\to l$, allora $g(\mathbf{x})\to l$.* ✓

si usa la def. e il fatto che la norma è lip. → ★

1. *Se $\mathbf{f} : A\to\mathbb{R}^M$ e se $\mathbf{f}(\mathbf{x})\to\mathbf{l}$ per $\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0$, allora $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_M\to\|\mathbf{l}\|_M$.* ✓
2. *Se $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2 : A\to\mathbb{R}^M$, se $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})\to\mathbf{l}_1$ $\mathbf{f}_2(\mathbf{x})\to\mathbf{l}_2$ per $\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0$, allora $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}_2(\mathbf{x})\to\mathbf{l}_1\cdot\mathbf{l}_2$.* ✓
3. *Se $\mathbf{f} : A\to\mathbb{R}^M$, $g : A\to\mathbb{R}$, se (per $\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0$) si ha $\mathbf{f}(\mathbf{x})\to\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ e $g(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})\to\lambda\,\mathbf{v}$, allora $g(\mathbf{x})\to\lambda$.* ✓

ESEMPIO DI USO DI ● So che $\lim_{y\to 0}\frac{\overbrace{\sin(y)}^{g(y)}}{y} = 1$

deduco che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$. IN QUESTO USO CHE

$\boxed{f(x) = x^2 \neq 0 \text{ se } x\neq 0}$

Da queste proprietà deduco per esempio che

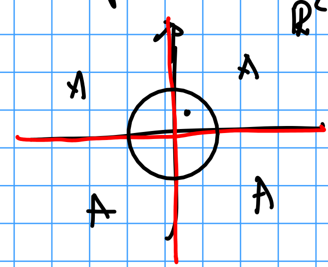
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y^2)}{x\,y} = 0 .$$

(1) INNANZI TUTTO abbiamo una funzione $= f(x,y)$ $f(x,y)$ che è definita se $xy \neq 0$

DUNQUE $A = \{(x,y) : x \neq 0 \text{ E } y \neq 0\}$. POI

$(0,0)$ è di acc. per A. INFATTI per ogni $r>0$ trovo dei punti (x,y) con $x\neq 0, y \neq 0$ e $x^2+y^2 < r^2$ (basta prendere

$x = \frac{r}{2}$ $y = \frac{r}{2}$ $x^2+y^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{2} < r^2$



$\Rightarrow$ HA SENSO FARE IL LIMITE

(2) conviene usare il teorema di composizione

dicendo che $f(x,y) = h(g(x,y))$ dove

$g(xy) = xy$ (da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) e $h(t) = \frac{\sin(t^2)}{t}$

$h : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

(2.1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$ Infatti :

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$ (proiezioni !)

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\,y = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\right) = 0 \cdot 0 = 0$ (prodotto)

Inoltre se $(x,y) \in A$, $\Rightarrow x \neq 0, y \neq 0$ (vale l'ipotesi $\boxed{}$)

(2.2) $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^2)}{t} = \lim_{t\to 0} t\,\frac{\sin(t^2)}{t^2} = 0 \cdot 1 = 0$

(Analisi 1) (oppure usato Hôpital)

cioè $\lim_{t\to 0} g(t) = 0$.

$\Longrightarrow$ DALLA COMPOSIZIONE HO LA TESI).

ESEMPIO (in cui il limite NON ESISTE)

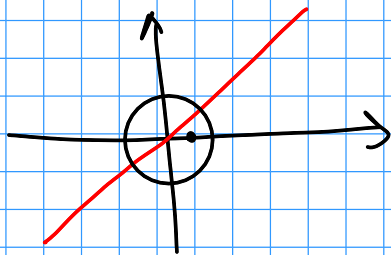
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{\frac{\sin(x+y)}{x-y}} = ??$$
$= f(x,y)$

(1) DOMANDA chi è A (dominio di $f(x,y)=\frac{\sin(x+y)}{x-y}$

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}$ con $x\neq y\}$

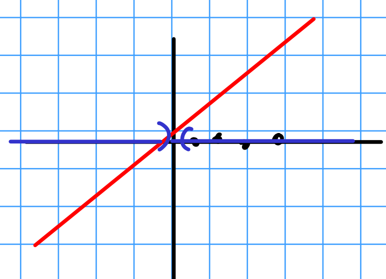
(2) $(0,0)$ è di accumulazione per A   SÌ :

dato $r>0$ posso prendere $(\frac{r}{2},0)\in B((0,0),r)$ (x, y)



DUNQUE POSSO CHIEDERMI SE $\exists$ limite.

OSS. Se prendo i punti (x,y) con $y=0 \Rightarrow$ sono in A (eccetto $(0,0)$ che non mi interessa) VEDO CHE "se mi restringo a questi punti" il limite fa 1 perché



$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$ POSSO VEDERLO COSÌ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(\Pi_x(x,y))=1$$

dove $\Pi_x(x,y)=x$

Però posso fare lo stesso con Π_y : (prendo $x=0$) $\quad (\Pi_y(x,y)=y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(\Pi_y(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(y)}{-y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{-y} = -1$$

QUESTO IMPEDISCE CHE f ABBIA limite

INFATTI posso considerare $\varphi_x(t)=(t,0)$ che va da $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ e che verifica [illegible]

$$\lim_{t\to 0} \varphi_x(t) = \lim_{t\to 0} (t,0) = (0\,0)$$ (per il limite delle componenti)

ALLORA se esistesse $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$

allora per il teorema di composizione

$$\lim_{t\to 0} f(\underbrace{\varphi_x(t)}) = \ell$$

$\downarrow_{(0,0)}$ $t\to 0$ (e $\varphi_x(t) \neq (0,0)$ se $t \neq 0$)

(qui la f è la "funzione esterna" che era chiamata g e φ_x è la "funzione interna" che si chiamava f)

$$= \lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1 \Rightarrow \boxed{\ell = 1}$$

PERÒ Posso fare lo stesso ragionamento con $\varphi_y(t) = (0,t)$

Anche questo tende a $(0,0)$ se $t\to 0$, ed è $\neq (0,0)$ se $t \neq 0$

DUNQUE AVREI

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi_x(t)) = \ell$$ (siamo nelle ipotesi del teorema di composizione)

$$\| $$

$$\lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(y)}{-y} = -1 \Rightarrow \boxed{\ell = -1}$$

ASSURDO

QUESTA FUNZIONE $\left(f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x-y} \right)$ $\boxed{\text{NON}}$ HA LIMITE per $(x,y) \to (0,0)$

NOTIAMO che potrei considerare $m \neq 1$ e prendere ← perché voglio $x \neq y$

$\gamma(t) = (t, mt)$. Questa γ va da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ (e manda in A dato che $m \neq 1$)

(e descrive "in forma parametrica" la retta $y = mx$)

(una cosa del genere verrà detta "CURVA"). Allora

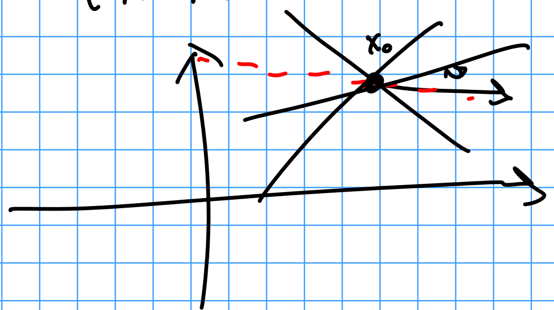
$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t+mt)}{t-mt} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin((m+1)t)}{(1-m)t} = \frac{m+1}{1-m}$$

DUNQUE "Su ogni retta" $y = mx$ con $m \neq 1$ esiste il limite ma varia con la retta $\Rightarrow$ NON ESISTE IL LIMITE "vero"

FATTO Se esiste il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ (in $\mathbb{R}^n \ldots$)

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} f(x_0 + t\vec{v}) = \ell \quad \text{per ogni vettore } \vec{v} \neq 0$$

(AMMESSO CHE $x_0 + t\vec{v} \in A$ per t vicino a zero)



- - retta $x_0 + t\vec{v}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$

(perché $\lim_{t \to 0} x_0 + t\vec{v} = x_0$!!)

(limite sulle rette per il punto x_0) !!

LIMITI "∞" Ci sono vari casi (con ipotesi diverse)

(I°) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \,/\, -\infty$ QUALORA f abbia valori reali: $f : A \to \mathbb{R}$ (x_0 di acc. per A)

DICO che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \,/\, (-\infty)$ se

$\forall\, c \in \mathbb{R} \quad \exists\, r > 0$ tale che

se $0 < \|x - x_0\| < r$, $x \in A \Rightarrow f(x) \geq c \,/\, (f(x) \leq c)$

(II°) $f : I \to \mathbb{R}^M$, $\ell \in \mathbb{R}^M$ $I \subset \mathbb{R}$ (I INTERVALLO per esemp.)

se I è illimitato superiormente (e illimitato inferiormente) posso definire

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell$ $(t \to -\infty)$ se

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che se $x \geq c$ $(x \leq c)$, $x \in I \Rightarrow \|f(t) - \ell\| < \varepsilon$

(III) (a) $A \subset \mathbb{R}^N$ $\quad A$ NON È LIMITATO

$f: A \to \mathbb{R}^M \qquad \ell \in \mathbb{R}^M$

DIRÒ CHE $\displaystyle\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = \ell$ se

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists R>0$ tale che

se $x\in A \quad \|x\|\geq R \Rightarrow \|f(x)-\ell\|<\varepsilon$

(b) Nel caso in cui $f: A\to\mathbb{R}$

DIRÒ che

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty \; / \; (-\infty) \qquad \text{se}$$

$\forall c\in\mathbb{R} \quad \exists R>0$ tale che

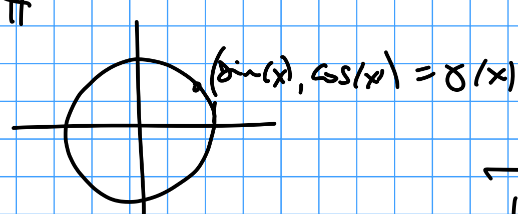
$x\in A,\ \|x\|\geq R \Rightarrow f(x)\geq c \; / \; (f(x)\leq c)$

ESEMPI (1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$ (si vede dopo del)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cos(x), \frac{1}{x}\sin(x)\right) =$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\cos(x), \sin(x)\right) = (0,0)$

OSS. Se $\gamma(x) = (\cos(x), \sin(x)) \Rightarrow \gamma$ descrive parametricamente la circonferenza di raggio 1; $\gamma(x)$ è periodica di periodo 2π

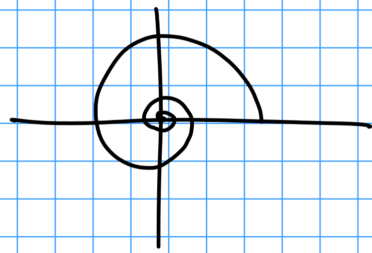


$\|\gamma(x)\| = \sqrt{\cos^2(x)+\sin^2(x)} = 1$

$\boxed{\text{DUNQUE } \gamma(x) \text{ È LIMITATA}}$

- INOLTRE $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ (Analisi I)

- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \gamma(x) = (0,0)$ (INFINITESIMO x LIMITATO)



(3)

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} \left(x^2 - xy + 2y^2 \right) = +\infty$$

Per dimostrarlo uso una "minorazione":

?? $x^2 - xy + 2y^2 \geq \alpha \left(x^2 + y^2 \right)$ per un $\alpha > 0$

AMMETTIAMO DI AVERE TROVATO $\alpha > 0$ come sopra. ALLORA

POSSO USARE UN TEOREMA DI MONOTONIA:

$f(x) \geq g(x)$ e $g(x) \to +\infty$ se $x \to x_0$ / $\|x\| \to \infty$

$\Rightarrow f(x) \to +\infty$ $(x \to x_0$ / $\|x\| \to \infty)$

Allora dato che vale la minorazione, e dato che

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} \alpha \left(x^2 + y^2 \right) = \lim_{\|(x,y)\| \to \infty} \alpha \|(x,y)\|^2 = +\infty$$

(lo vedo subito)

(posso dire per bene che $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} \|(x,y)\|^k = +\infty$; $\forall k > 0$)

$$x^2 - xy + 2y^2 \geq \alpha \left(x^2 + y^2 \right) \quad ??$$

IL PROBLEMA È xy. POSSO USARE LA DIS.

$$\boxed{|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \forall a,b}$$

$\left(\begin{array}{l} 2ab \leq a^2 + b^2 \iff \\ 0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \end{array} \right)$

DUNQUE $\quad xy \le \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2} \iff -xy \ge -\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}$

$$\Rightarrow x^2-xy+2y^2 \ge x^2-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+2y^2 = \frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}y^2 \ge \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

(CON $\alpha = \frac{1}{2}$ TORNA)

OSSERVIAMO CHE $x^2-xy+2y^2$ è una forma quadratica

che corrisponde alla matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$ ← APPLICO SYLVESTER:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}=1>0 \\ \det A = 2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}>0 \end{array}\right. \Rightarrow A>0$$

FATTO GENERALE $\quad$ Se $A>0$ allora la sua forma
A SIMMETRIC

quadratica $\varphi(x) = x^t A x$ ha la proprietà

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \varphi(x) = +\infty$$

INFATTI $\quad A$ ha N autovalori $\lambda_1 \dots \lambda_N$ (non distinti)

con $e_1 \dots e_N$ autovettori e so che $\lambda_i > 0 \quad \forall i=1\dots N$

POSSO METTERLI IN ORDINE: $0<\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_N$

↑ E' IL PIÙ PICCOLO DI TUTTI

Se mi metto nella base $\{e_1 \dots e_N\}$

$$\varphi(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots \lambda_N x_N^2 \ge \lambda_1 (x_1^2+\dots x_N^2) = \lambda_1 \|x\|^2$$

$\Rightarrow$ RAGIONANDO COME PRIMA $\Rightarrow \lim_{\|x\|\to+\infty} \varphi(x) \ge \lim_{\|x\|\to\infty} \lambda_1 \|x\|^2$

$= +\infty \quad \#$