Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 05 10/10/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Forma quadratica è una funzione da $\mathbb{X}$ (di dim N) $\to \mathbb{R}$ data da

$\varphi(x) = a(x,x)$ $\qquad$ a bilineare simmetrica su $\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{R}$

$= [x]_B^t A [x]_B$ $\qquad$ dove $B = \{e_1 \dots e_N\}$ è una base e la matrice A (simmetrica) è data da

$a_{ij} = a(e_i, e_j)$

Abbiamo detto che $\varphi \geq 0$ / $A \geq 0$ / $a \geq 0$ (semidefinita positiva) se: $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{X}$

$\varphi \leq 0$ / $A \leq 0$ / $a \leq 0$ se $\varphi(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{X}$

$\varphi > 0$ (<0) / $A > 0$ (<0) / $a > 0$ (<0) (definita positiva)

se $\varphi(x) > 0$ (<0) $\quad \forall x \in \mathbb{X}$ eccetto $x = 0$

VISTO che una matrice simmetrica A ammette tutti autovalori reali e una base di autovettori ortonormali

$\Longleftrightarrow$ Esiste M $\left(M = [e_1 | \dots | e_N] \right)$ tale che

$$M^t A M = D = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_N}_{\text{eventualmente ripetuti}})$$

$A e_i = \lambda_i e_i$

$$\Updownarrow$$

$$A = M D M^t \left(= M D M^{-1} \right) \qquad \left(M^t = M^{-1} \;!! \right)$$

Fatto (semplice) (A simm.) $\forall$

$A \geq 0 \Longleftrightarrow$ tutti gli autovalori di A sono ≥ 0

$A > 0 \Longleftrightarrow$ " " " " " " " sono > 0

$A \leq 0 \Longleftrightarrow$ " " sono ≤ 0

$A < 0 \Longleftrightarrow$ " " sono < 0

IN EFFETTI SE MI METTO NELLA BASE $\{e_1 \dots e_N\}$ fatta dagli autovettori $\Rightarrow$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^N c_i e_i \right) = \sum_{i=1}^N \boxed{\lambda_i} c_i^2$$

$$\parallel$$

$$[c_1 \dots c_N] A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_N \end{bmatrix}$$

$A =$ $e_i A e_j = A_j e_i \cdot e_j = \lambda_j e_i \cdot e_j = \begin{cases} \lambda_j & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Per vedere "la segnatura" di una matrice si può evitare di calcolare gli autovalori $\Rightarrow$

CRITERIO DI SYLVESTER

IL PROIETTORE CI HA NUOVAMENTE ABBANDONATO

RIASSUNTO DI QUANTO FATTO ALLA LAVAGNA

1.1.44 Definizione. Data una matrice $M \times N$ A si chiama *minore* di A una sottomatrice A_I^J ottenuta da A cancellando un sottoinsieme $I \subset \{1, \ldots, M\}$ di righe e un sottoinsieme $J \subset \{1, \ldots, N\}$ di colonne. Se A è quadrata ($M = N$) possiamo definire i *minori principali di* A come le sottomatrici quadrate A_I^I, dove $I \subset \{1, \ldots, N\}$ (dunque $J = I$).

Se $K = 1, \ldots, N$ chiamo *minore principale dominante* K*-esimo* la sottomatrice $A(K)$ ottenuta cancellando le ultime $N - K$ righe e le ultime $N - K$ colonne, cioè $A(K) := A_{\{N-K+1,\ldots,N\}}^{\{N-K+1,\ldots,N\}}$.

$$A(1) = (a_{1,1}), \ A(2) = \begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \end{pmatrix}, \cdots, A(K) = \begin{pmatrix} a_{1,1}, & \cdots, & a_{i,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{K,1}, & \cdots, & a_{K,K} \end{pmatrix}.$$

Si noti che il secondo caso segue dal primo dato che A è definita negativa se e solo se $-A$ è definita positiva. Non è vero l'analogo criterio ottenuto rimpiazzando "definita" con "semidefinita" e "$>$" con "$\geq$". Vale in effetti:

- *la matrice A (la forma quadratica associata ad A) è semidefinita positiva sse:*

$$\det(A') \geq 0 \qquad \textit{per ogni minore principale } A'.$$

1.2.12 Definizione. Se $x_0 \in \mathbb{X}$ e $A \subset \mathbb{X}$ dico che x_0 è *di accumulazione per* A, se:

$$\forall r > 0 \; \exists x \in B(x_0, r) \cap A \text{ con } x \neq x_0.$$

L'insieme dei punti di accumulazione per A si chiama *il derivato di* A e si indica con $D(A)$. I punti di A che non sono di accumulazione per A si dicono *punti isolati in* A.

1.3.1 Definizione (limite)**.** Sia A un sottoinsieme di uno spazio normato $\mathbb{X}$ e sia $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}$ un punto di accumulazione per A. Sia $\mathbf{f} : A \to \mathbb{X}_1$ dove $\mathbb{X}_1$ è un altro spazio normato con norma $\| \; \|_1$. Diciamo che un elemento $\mathbf{l}$ di $\mathbb{X}_1$ è il *limite di* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *per* $\mathbf{x}$ *che tende a* $\mathbf{x}_0$, e scriveremo

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l},$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall \mathbf{x} \text{ con } \mathbf{x} \in A, \; \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0, \; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \text{ si ha } \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\|_1 < \varepsilon. \quad (1.5)$$

Notiamo che agli effetti del limite non ha nessuna rilevanza l'eventuale valore che $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ assume in $\mathbf{x}_0$. Quando $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$ diremo anche che $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *tende a* $\mathbf{l}$ *per* $\mathbf{x}$ *che tende a* $\mathbf{x}_0$ e scriveremo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{l} \qquad (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{l} \text{ se } \mathbf{x}_0 \text{ è chiaro dal contesto}).$$

1.3.2 Teorema (unicità del limite)**.** *Siano $\mathbb{X}$ e $\mathbb{X}_1$ due spazi normati con norme $\| \; \|$ e $\| \; \|_1$ rispettivamente. Siano $A \subset \mathbb{X}$, $\mathbf{f} : A \to \mathbb{X}_1$ una funzione e $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}$ un punto di accumulazione per A. Se esistono*

$$\mathbf{l}_0 = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{l}_1 = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

allora $\mathbf{l}_0 = \mathbf{l}_1$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\mathbf{l}_0 \neq \mathbf{l}_1$. Prendiamo $\varepsilon := \dfrac{d_1(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)}{3}$ (> 0). Per la definizione di limite esistono $r_0 > 0$ e $r_1 > 0$ tali che valga la (1.5) per $r = r_0$, $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ e per $r = r_1$, $\mathbf{l} = \mathbf{l}_1$. Prendendo $r := \min(r_0, r_1)$ otteniamo che

$$\forall x \in B(\mathbf{x}_0, r) \cap A \text{ con } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \quad \text{si ha } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B_1(\mathbf{l}_0, \varepsilon) \textbf{ e } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B_1(\mathbf{l}_1, \varepsilon).$$

Dato che $\mathbf{x}_0$ è di accumulazione per A c'è sicuramente un punto $\mathbf{x}$ in $B(\mathbf{x}_0, r) \cap A$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ e quindi $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ deve stare contemporaneamente in $B_1(\mathbf{l}_0, \varepsilon)$ e in $B_1(\mathbf{l}_1, \varepsilon)$. Ma questo è impossibile, dato che:

$$3\varepsilon = d_1(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1) \leq d_1(\mathbf{l}_0, \mathbf{y}) + d_1(\mathbf{y}, \mathbf{l}_1) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \;!!!$$

1.3.5 Teorema. *Siano $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ spazi normati, $A \subset \mathbb{X}$, $B \subset \mathbb{X}_1$, $\mathbf{x}_0$ di accumulazione per A e $\mathbf{y}_0$ di accumulazione per B. Valgono i fatti seguenti (sottinteso che $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$).*

- **(linearità del limite)** *Siano $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 : A \to \mathbb{X}_1$. Se $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \to \mathbf{l}_1$ e $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \to \mathbf{l}_2$ allora $(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)(\mathbf{x}) \to \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$.*

- **(limite del prodotto)** *Se $f_1 : A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f}_2 : A \to \mathbb{X}_1$ e se $f_1(\mathbf{x}) \to l_1$ e $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \to \mathbf{l}_2$, allora il prodotto $f_1\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \to l_1\mathbf{l}_2$.*

- *Se $\mathbf{f}_1 : A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f}_2 : A \to \mathbb{X}_1$, se una delle due è limitata e l'altra tende a zero, allora $\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \to 0$.*

- **(limite della composizione/cambio di variabile)** *Se $\mathbf{f} : A \to B$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{y}_0$ con $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{y}_0$ per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, se $\mathbf{g} : B \to \mathbb{X}_2$ e $\mathbf{g}(\mathbf{y}) \xrightarrow{y\to\mathbf{y}_0} \mathbf{l}$, allora $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \xrightarrow{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{l}$.*

- **(limite della restrizione)** *Se $\mathbf{f} : A \to \mathbb{X}_1$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{l}$, se $A_1 \subset A$ e $\mathbf{x}_0$ è di accumulazione per A_1, allora la* restrizione *$\mathbf{f}|_{A_1} : A_1 \to \mathbb{X}$ tende ancora a $\mathbf{l}$.*

- **(limite e componenti)** *Se $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^N$ si ha che $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{l}$ se e solo $f_i(\mathbf{x}) \to l_i$ dove f_i e l_i indicano l'i-esima componente di $\mathbf{f}$ e $\mathbf{l}$.*

  Inoltre per ogni $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^N$ e ogni $i = 1, \ldots, N$ si ha:

  $$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}'} x_i = x_i'.$$

- **(permanenza del segno)**) *Se $f : A \to \mathbb{R}$ e $f(\mathbf{x}) \to l > 0$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in A$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.*

- **(monotonia del limite)** *Se $f : A \to \mathbb{R}$ e $f(\mathbf{x}) \to l > 0$ e se $f(\mathbf{x}) \geq 0$, allora $l \geq 0$.*

- **(teorema dei carabinieri)** *Se $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ e se $f(\mathbf{x}) \to l$, $h(\mathbf{x}) \to l$, allora $g(\mathbf{x}) \to l$.*