Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 04 05/10/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

a è bilineare: pongo $a_{ij} = a(e_i, e_j)$

$$a(x,y) = [x]_B^t \, A \, [y]_B$$

(nelle lezioni di ieri x e y erano invertiti). Se considero la forma quadratica comunque non ci sono problemi.

FORMA QUADRATICA $\varphi : X \to \mathbb{R}$ X s.v.

$$\varphi(x) = a(x,x)$$ dove a è bilineare $a : X \times X \to \mathbb{R}$

POSSO SUPPORRE a SIMMETRICA.

FATTO Se φ è una forma quadratica, se B è una base per X, trovo una matrice A, con $A^t = A$, per cui

$$\varphi(x) = [x]_B^t \, A \, [x]_B$$

Def. Dico che una applicazione bilineare a / una matrice A /

· forma quadratica φ è SEMIDEFINITA POSITIVA se

$$\varphi(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x},\mathbf{x}) = {}^t[\mathbf{x}]\, A\, [\mathbf{x}] \geq 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X}$$

Per esempio se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ vediamo che $\underbrace{A \geq 0}$

$$(x,y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \iff (x,y) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + xy \geq 0$$

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq 0$$

TORNA

ANZI POSSO NOTARE CHE $(x,y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0$ se $(x,y) \neq (0,0)$

Def. · Dico che $a / A / \varphi$ è positivo se

$$\varphi(x) > 0 \;/\; {}^t[x]_B A [x]_B > 0 \;/\; a(x,x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{X},\ x \neq 0$$

Analogamente parlo di "semidefinito negativo", "negativo" (mettendo ≤ 0, < 0 al posto di ≥ 0, > 0)

· Dico che $a / A / \varphi$ è INDEFINITA se trovo uno $x_1 \in \mathbb{X}$ per cui $\varphi(x_1) > 0$ e uno $x_2 \in \mathbb{X}$ per cui $\varphi(x_2) < 0$

MA $\cdot \ker A = \{0\}$

(questi tre casi NON ESAURISCONO TUTTE LE POSSIBILITÀ: per esempio $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ NON RICADE IN NESSUNO DEI CASI

A ha nucleo

CI TORNIAMO DOPO

"SEGNO DI A" $\longleftrightarrow$ "autovalori di A"

Def. $L : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ lineare. Dico che $\lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ è un autovalore se esiste $e \in \mathbb{X}$, $e \neq 0$ per cui

$$L e = \lambda e$$

e si chiama autovettore (relativo a λ).

- Gli autovettori relativi a un autovalore λ formano un sottospazio lineare (aggiungendo zero)
- Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e_1 autovettore per λ_1, e_2 autovettore per λ_2

$\Rightarrow$ e_1 e e_2 sono linearmente indipendenti

- λ_0 è autovalore $\Leftrightarrow$ λ_0 è radice del pol. caratteristico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \qquad (A \text{ rappresenta } L)$$

(di grado $N = \dim(X)$)

- Se indico $N(\lambda) = \text{span}(\text{autovettori per } \lambda)$ ($N_\lambda = \{0\}$ se λ non è autovalore)

λ- AUTOSPAZIO

MI POSSO CHIEDERE SE $X = N(\lambda_1) + \dots + N(\lambda_k)$

per $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ autovalori.

- VERA SE trovo esattamente N autovalori distinti

$\Rightarrow$ trovo $\lambda_1 \cdots \lambda_N$ autovalori, $N(\lambda_1) \cdots N(\lambda_N)$:

hanno tutti dimensione 1 e generano X

<u>Def</u> Se λ_0 è autovalore si chiama <u>MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA</u> $m_A(\lambda_0)$ la molteplicità di λ_0 come radice di $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$.

Chiamo MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA $m_G(\lambda_0) = \dim N(\lambda_0)$

<u>FATTO</u> $m_G(\lambda) \leq m_A(\lambda)$.

Se per ogni autovalore λ $m_G(\lambda) = m_A(\lambda)$ (in $\mathbb{C}$)

$\Rightarrow$ Trovo effettivamente che $X = N(\lambda_1) + \dots + N(\lambda_k)$ (in $\mathbb{C}$)

• LA PROPRIETÀ $X = N(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus N(\lambda_k)$ significa che esiste una base $\mathcal{B}$ per X fatta da autovettori. QUESTO SIGNIFICA CHE in questa base $\mathcal{B}$

$$D = [L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \text{ è una matrice diagonale}$$

Se in particolare ordino i vettori opportunamente

$$\overbrace{\underbrace{e_{\lambda_1} \cdots e}_{\lambda_1}}^{m_1} \ \overbrace{\underbrace{e \cdots e}_{\lambda_2}}^{m_2} \ \cdots \ \overbrace{\underbrace{e \cdots e}_{\lambda_k}}^{m_k} \qquad m_1 + \cdots + m_k = N$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_k & \\ 0 & & & & \ddots \ \lambda_k \end{bmatrix} = \mathrm{Diag}(\overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{m_1}, \overbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}^{m_2}, \cdots, \overbrace{\lambda_k \cdots \lambda_k}^{m_k})$$

Guardando le formule di ieri vedo che

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}\hat{\mathcal{B}}}}_{\text{cambio di basi}} \ \underbrace{[L]_{\hat{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{B}}}}_{L \text{ rappresentato nella base canonica}} \ \underbrace{M_{\hat{\mathcal{B}}\mathcal{B}}}_{\text{cambio di Base}} = D$$

Se $A = [L]_{\hat{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{B}}}$ ho che

$$\boxed{M^{-1} A M = D = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_1, \cdots, \lambda_k \cdots \lambda_k)}$$

dove $M = \begin{bmatrix} [e_1]_{\hat{\mathcal{B}}} & \cdots & [e_N]_{\hat{\mathcal{B}}} \end{bmatrix}$ $\quad e_1 \cdots e_N$ sono gli elementi di $\mathcal{B}$

$$\boxed{A = M D M^{-1}}$$

A SIMMETRICA

Supponiamo che in X ci sia un prodotto scalare $(x, y) \to x \cdot y$. Dico che $L : X \to X$ lineare è simmetrico quando $Lx \cdot y = x \cdot Ly \quad \forall x, y \in X$

Supponiamo che in X ci sia una base $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_N\}$ ORTONORMALE: $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$

Allora L è simmetrico $\iff [L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} =: A$ è simmetrica
cioè $A = A^t$

(NOTA CHE IN QUESTO CASO $x \cdot y = [x]_{\mathcal{B}} \cdot [y]_{\mathcal{B}}$ ← PRODOTTO DI $\mathbb{R}^N$

<u>Teorema spettrale</u> Se L è simmetrico (se $X = \mathbb{R}^N$ posso pensare a una matrice A simmetrica). Allora

- L ha solo autovalori reali
- per ogni λ autovalore $m_A(\lambda) = m_G(\lambda)$
- Autovalori diversi corrispondono ad autovettori ortogonali

$\Rightarrow$ Esiste una base di autovettori (con autov. reali) TRA LORO ORTONORMALI

Se passo alle matrici ottengo che A simmetrica $\Rightarrow$

$$A = M D M^{-1}$$

con D diagonale e $M = [e_1 | \dots | e_N]$ dove $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{M^{-1} = M^t}$ (in effetti si vede $M^t M = I$)