Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 03 04/10/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Spazi vettoriali

$\mathbb{X}$ è un insieme su cui sono definite la somma

$x+y$ se $x, y \in \mathbb{X}$ e il prodotto λx $\lambda \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{X}$

con le solite proprietà (si può usare $\mathbb{C}$ invece di $\mathbb{R}$)

ESEMPIO $\mathbb{R}^N$ è uno sp. vett. $x = (x_1 \dots x_N)$
$y = (y_1 \dots y_N)$
$\lambda \in \mathbb{R}$

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N)$$
$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_N)$$

Definizioni

- Se $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{X}$ e $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ dico che $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ è una combinazione lineare di $x_1 \dots x_n$ con coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
- Se $x_1 \dots x_n \in \mathbb{X}$ dico che $x_1 \dots x_n$ sono linearmente indipendenti se ogni comb. lin. di $x_1 \dots x_n$ che

abbia zero come risultato deve necessariamente avere tutti i coefficienti nulli. In altri termini

se $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Dico che sono lin. dipendenti se esistono $\lambda_1 \dots \lambda_n$ non tutti nulli per cui $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$

- Se $x_1 \dots x_n \in X$ chiamo span$(x_1 \dots x_n)$ (spazio generato da $x_1 \dots x_n$) l'insieme

$$\mathrm{span}(x_1 \dots x_n) = \{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n , \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \}$$

(è un "sottospazio" di X)

- Dico che $e_1 \dots e_N$ sono una base di X se

  (a) $e_1 \dots e_N$ sono lin. indip.
  (b) $\mathrm{span}(e_1, \dots, e_N) = X$

<u>Teorema</u> (i) Se $e_1 \dots e_N$ è una base per X, allora per ogni $x \in X$ esiste una <u>unica</u> N-pla $(\lambda_1 \dots \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_N e_N$$

<u>Dico allora</u> che $(\lambda_1 \dots \lambda_N)$ sono le <u>COORDINATE</u> di x rispetto alla base $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_N\}$

(ii) Se $\{e_1 \dots e_N\}$ e $\{\tilde{e}_1 \dots \tilde{e}_M\}$ sono due basi di X

$\Rightarrow N = M$

Dico allora che N $(= M)$ è la dimensione di X

OSS. La def. di base scritta sopra prevede che la base sia formata da un numero finito di elementi. IN REALTÀ potrei dare una def. più generale: se $\mathcal{B} \subset X$ (un sottoinsieme) dico che $\mathcal{B}$ è una base quando:

- Per ogni $e_1 \dots e_n \in \mathcal{B} \Rightarrow e_1 \dots e_n$ sono lin. indip (ogni gruppo finito di elementi di $\mathcal{B}$)
- $\forall x \in X$ esiste un gruppo finito $e_1 \dots e_m \in X$ e $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ con $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_N$

SE $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$ non è finita dico che $\dim X = +\infty$

(X è uno spazio vettoriale di dimensione infinita)

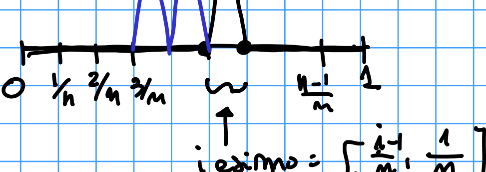
ESEMPIO (di uno spazio di dimensione ∞)

$$X = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continua} \}$$

X è uno spazio vettoriale: se f, g sono continue $\Rightarrow f+g$ è una funz. continua e anche λf è continua se $\lambda \in \mathbb{R}$

VEDIAMO CHE X non può avere una base fatta da un numero finito di elementi: MOSTRO CHE $\forall n$ si possono trovare $f_1, \dots, f_n \in X$ linearmente indip.

Dato $n \in \mathbb{N}$. Divido $[0,1]$ in n - sottointervalli di ampiezza $\frac{1}{n}$. Se $i = 1 \dots n$



costruisco $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua in modo che $f_i(x) = 0$ se $x \notin \left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$

$f_i(x) > 0$ se $x \in \left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$

(ho costruito $f_1, f_2, \dots, f_n$). Dico che sono lin. indip.

Siano $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ e supponiamo che

$$(*) \qquad \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0 \qquad (0 \in X)$$

<u>ATTENZIONE</u> Dire $f = 0$ (in X) significa $f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]$

Dunque $(*)$ significa

$$\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = \underset{(0 \in \mathbb{R})}{0} \qquad \forall x \in [0,1]$$

Se prendo $x \in \left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$ e lo metto nella riga sopra vedo che

$$f_j(x) = 0 \quad \text{se } i \neq j \qquad \text{e quindi rimane}$$

$$\lambda_i \underbrace{f_i(x)}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0$$

Dato che questo discorso lo posso ripetere per ogni $i = 1 \dots n \Rightarrow$ $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$; ho dim. che $f_1 \dots f_n$ sono lin. indip. #

TORNIAMO agli spazi di dim $< +\infty$.

$\dim(X) = N$ ogni base $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_N\}$ individua una corrispondenza tra $x \in X$ e $\mathbb{R}^N$; quella che associo a x le sue coordinate $[x]_{\mathcal{B}}$ rispetto a $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{ccc} X & & \mathbb{R}^N \\ \Psi & & \Psi \\ x & \xrightarrow[\text{è biiettiva}]{} & [x]_{\mathcal{B}} \end{array}$$

$[x]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^N$ ← DIPENDE DALLA BASE $\mathcal{B}$

DUNQUE X di dim N è "una copia di $\mathbb{R}^N$"

Nello stesso $\mathbb{R}^N$ posso considerare basi diverse.

<u>CASO ELEMENTARE</u> $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{e}_1 \dots \hat{e}_N\}$ dove

$\hat{e}_i = (0 \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1} \cdots 0)$ (versori canonici

$\hat{\mathcal{B}}$ base canonica)

IN QUESTO CASO $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ $x = [x]_{\hat{\mathcal{B}}}$

Però (come detto) posso considerare altre basi e allora

$$[x]_{\mathcal{B}} \neq [x]_{\hat{\mathcal{B}}}$$

Applicazioni lineari.

<u>Def.</u> $\mathbb{X}$ $\mathbb{X}_1$ spazi vettoriali $L : \mathbb{X} \to \mathbb{X}_1$

L è <u>lineare</u> se $L(\lambda x + \mu y) = \lambda Lx + \mu Ly$

$\forall x, y \in \mathbb{X}$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(scriverò Lx in luogo di $L(x)$)

<u>Fatto</u> Supponiamo che $\mathcal{B} = \{e_1 \cdots e_N\}$ e $\mathcal{B}' = \{e'_1 \ldots e'_M\}$ siano delle basi per $\mathbb{X}$ e $\mathbb{X}_1$ e che $L : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ sia lineare.

CONSIDERIAMO LA MATRICE A di dim. $M \times N$
(M righe ed N colonne — CONVENZIONE: i vettori sono COLONNE)

$$A = \Big[[Le_1]_{\mathcal{B}'} \cdots [Le_N]_{\mathcal{B}'} \Big]$$

A ha per colonne le coordinate dei vettori $Le_1 \ldots Le_N$ scritti in $\mathcal{B}'$

QUESTA MATRICE HA LA PROPRIETÀ

$$[Lx]_{\mathcal{B}'} = \underset{M\times N}{A} \cdot \underset{N\times 1}{[x]_{\mathcal{B}}} \to M\times 1$$

← PRODOTTO RIGHE × COLONNE

(A rappresenta L nelle basi $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{B}'$ in arrivo)

INDICHERÒ $A = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ ($[L]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$

FATTI (a) $[L_1 + L_2]_{B'B} = [L_1]_{B'B} + [L_2]_{B'B}$

(b) $\underset{B}{X} \xrightarrow{L} \underset{B'}{X_1} \xrightarrow{L'} \underset{B''}{X_2}$ $\qquad [L' \circ L]_{B''B} = [L']_{B''B'}[L]_{B'B}$

PRODOTTO TRA MATRICI

NOTA • Se i è l'applicazione identica $i(x) = x$ $(i : X \to X)$ e B è una base per X $\Rightarrow$ $[i]_{BB} = I_N = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

• Se L è invertibile (da $X \to X_1$) allora $L^{-1} \circ L = i$ (su X)

$$[L^{-1} \circ L]_{BB} = [i]_{BB} = I$$

$$\overset{\parallel}{[L^{-1}]_{BB'}[L]_{B'B}}$$

B base per X
B' base per X^1
$L : X \to X'$

DUNQUE $$[L^{-1}]_{BB'} = [L]_{B'B}^{-1}$$

CAMBI DI BASE

Nei discorsi sopra considero $L = i$, $i(x) = x$ ma prendo basi diverse. (B e B' - BASI DI X) LA FORMULA DI CB

(★) $$[i]_{B'B} = \left[[e_1]_{B'} \cdots [e_N]_{B'} \right] =: M_{B'B} \qquad (Le_i = e_i)$$

MI DÀ IL CAMBIO DI BASE DA B e B'

perché (come detto prima)

$$[x]_{B'} = M[x]_B$$

• Se $X = \mathbb{R}^N$ e $B' = \hat{B}$ (base canonica) $\Rightarrow$

$$M_{\hat{B}B} = [e_1 | \cdots | e_N]$$

(perché se $e_1 = (e_1^1 \cdots e_1^N)$ ho $\Rightarrow e_1^i = [e_1]_{\hat{B}}$)

DUNQUE IN $\mathbb{R}^N$ se $e_1 \ldots e_N$ è una base e considero

$$M = \left[e_1 \middle| \ldots \middle| e_N \right]$$

$\Rightarrow$ M corrisponde al cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\hat{\mathcal{B}}$

- Dato che $\boxed{M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \right)^{-1}}$

$$\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I \right)$$

$$\Rightarrow \quad M_{\mathcal{B}\hat{\mathcal{B}}} = \left[e_1 \middle| \ldots \middle| e_N \right]^{-1}$$

- Se poi ho $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi generiche su $\mathbb{X}$ si ho:
e_i e'_i

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'\hat{\mathcal{B}}} M_{\hat{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \left[e'_1 \middle| \ldots \middle| e'_N \right]^{-1} \left[e_1 \middle| \ldots \middle| e_N \right]$$

APPLICAZIONI BILINEARI

Se $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ $\quad (a(x,y) \in \mathbb{R} \ x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{X})$

dico che a è <u>bilineare</u> se
$$a(x+x', y) = a(x,y) + a(x',y)$$
$$a(x, y+y') = a(x,y) + a(x,y')$$
$$a(\lambda x, y) = a(x, \lambda y) = \lambda a(x,y)$$

(lineare in ognuno dei due argomenti)

- Se a è bilineare, dico che a è simmetrica quando:

$$a(x,y) = a(y,x) \qquad \forall x, y \in \mathbb{X}$$

Se in X ho una base $\mathcal{B}$ posso "rappresentare a" cioè:

se $\mathcal{B} = \{e_1 \cdots e_N\}$ definisco la matrice $N \times N$ A

che ha come componenti $\boxed{a_{ij} = a(e_i, e_j)}$:

$$A = \begin{bmatrix} a(e_1, e_1) & a(e_1, e_N) \\ \\ a(e_N, e_1) & a(e_N\ e_N) \end{bmatrix}$$

A LEZIONE ERANO SCAMBIATI

Allora $\forall x, y \in X$ $\quad a(x,y) = [x]_{\mathcal{B}}^t \, A \, [y]_{\mathcal{B}}$

ESEMPIO $[x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{x_1 y_1 + x_1 y_2 + y_2 x_2}_{a((x_1,x_2),(y_1,y_2))}$

$$\begin{cases} a(e_1, e_1) = 1 = a_{11} \\ a(e_1, e_2) = 1 = a_{12} \\ a(e_2, e_1) = 0 = a_{21} \\ a(e_2, e_2) = 1 = a_{22} \end{cases} \leftarrow \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}$$

FORMA QUADRATICA $\quad$ se a è appl. bilineare

chiamo "forma quadratica associata ad a"

$$\boxed{\varphi(x) = a(x,x)} \qquad \varphi : X \to \mathbb{R}$$

OSS $\quad \varphi(tx) = t^2 \varphi(x) \quad \forall x \in X \quad \forall t \in \mathbb{R}$

OSS. Se φ è una forma quadratica posso SEMPRE SUPPORRE $\varphi(x) = a(x,x)$ CON a SIMMETRICA in effetti se $\varphi(x) = Q(x,x)$ (non so che Q è simm.)

posso considerare $\tilde{Q}(x,y) = Q(y,x)$. $\tilde{Q}$ è un'altra app bilineare

POSSO SCRIVERE

$$\varphi(x) = \frac{Q(x,x) + \overset{\overset{Q(x,x)}{\parallel}}{\tilde{Q}(x,y)}}{2}$$

ORA PERÒ $\frac{Q + \tilde{Q}}{2}$ è simmetrica !!

OSS. Se A rappresenta Q, allora A^t rappresenta $\tilde{Q}$

. Q è simmetrica $\Longleftrightarrow$ $A^t = A$

DUNQUE Se φ è una forma quadratica su X, $\mathcal{B}$ base esiste
A $N \times N$ SIMMETRICA tale che

$$\varphi(x) = [x]_{\mathcal{B}}^t \, A \, [x]_{\mathcal{B}}$$

Per esempio $\varphi(x,y) = x^2 - 4xy - y^2$ è una forma quadratica

che corrisponde alla matrice $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

Potrei anche prendere $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ma la preferisco simmetrica!