Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 02 03/10/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

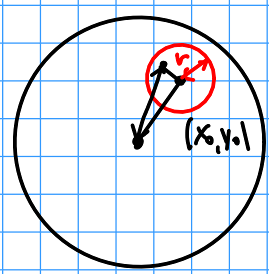
IN $\mathbb{R}^N$ definito punti INTERNI / ESTERNI / DI FRONTIERA PER UN INSIEME $A \subset \mathbb{R}^N$

Esempio $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} = \{(x,y) : d((x,y),(0,0))^2 < 1\}$
$(B((0,0),1))$

I° $\boxed{\text{TUTTI I PUNTI DI A SONO INTERNI AD A.}}$

dim Prendo $(x_0, y_0) \in A \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 < 1$

Voglio trovare $r > 0$ con la proprietà



$\otimes \quad B((x_0,y_0),r) \subset A$

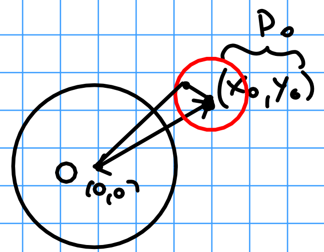
PRENDO $0 < r < 1 - \underbrace{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}_{<1}$ $= d((x_0,y_0),(0,0))$. Dico che vale $\otimes$

infatti se $(x,y) \in B((x_0,y_0),r) \Rightarrow$ (per la dis. triangolare)

$$d((x,y),(0,0)) \le \underbrace{d((x,y),(x_0,y_0))}_{<r} + d((x_0,y_0),(0,0)) < 1$$

per come è stato scelto il numero r.

$\underline{\text{II}^\circ}$ $\boxed{\text{Se } x_0^2+y_0^2>1 \Rightarrow (x_0,y_0) \text{ è esterno ad } A}$



mi serve $r>0$ tale che
$B(P_0,r) \cap A = \emptyset$

PRENDO $\underline{r < d(P_0,O) - 1}$ $\quad (r>0)$

Se $P \in B(P_0,r) \Rightarrow d(P,O) > 1$ INFATTI

$$\left[d(P_0,O) \le d(P_0,P) + d(P,O) < r + d(P,O) \right] \Leftrightarrow$$
$$d(P,O) > d(P_0,O) - r > 1$$ per come è stato scelto r

$\underline{\text{III}^\circ}$ $\boxed{\text{Se } d(P_0,O)=1 \Rightarrow P_0 \text{ è di frontiera per } A}$

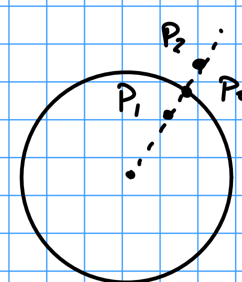
Notiamo prima che:

$$P_0 \text{ è di frontiera per } A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall r \text{ esistono } P_1,P_2 \in B(P_0,r) \\ \text{tali che } P_1 \in A \quad P_2 \notin A \end{cases}$$

(come si vede facilmente dalle definizioni)

Allora fissiamo $r>0$ e consideriamo

$$P_1 = (1-r/2)P_0 \qquad P_2 = (1+r/2)P_0$$



(sono due punti sulla retta che passa per l'origine e per P_0) Allora

$$\|P_1\| = (1-r/2)\|P_0\| = 1-r/2 < 1 \Rightarrow P_1 \in A$$
$$\|P_2\| = (1+r/2)\|P_0\| = 1+r/2 > 1 \Rightarrow P_2 \notin A$$

$$\|P_1-P_0\| = \|[(1-r/2)-1]P_0\| = \frac{r}{2}\|P_0\| = \frac{r}{2} < r$$
$$\|P_2-P_0\| = \|[(1+r/2)-1]\|P_0\| = r/2\,\|P_0\| = r/2 < r$$

e dunque $P_1, P_2 \in B(P_0, r)$

CONCLUDENDO :

- Da I° ottengo che $A \subset \mathring{A}$ e siccome $\mathring{A} \subset A$ deduco $A = \mathring{A}$
  (A è aperto)
- Da I° e II° ottengo che $\partial A \subset \{P : \|P\| = 1\}$, da III° ho l'inclusione inversa $\{P : \|P\| = 1\} \subset \partial A$ e dunque
  $\partial A = S(0,1) = \{P : \|P\| = 1\}$.
- Mettendo tutto insieme (e usando le proprietà di cui si parla dopo) ho che

$$\overline{B}(0,1) = \{P : \|P\| \leq 1\} \text{ è la chiusura di } A$$

(e dunque $\overline{B}(0,1)$ è chiuso)

- Guardando bene la dimostrazione di III° si vede anche che $\|P_0\| = 1 \Rightarrow P_0 \in \partial \overline{B}(0,1)$. Da questo è facile dedurre che $\partial \overline{B}(0,1) = \partial B(0,1) = S(0,1)$

PURTROPPO LA CONNESSIONE CON IL PROIETTORE NON HA FUNZIONATO. Per il resto della lezione riporto la pagina delle dispense :

1. $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.

2. $\overline{A} = A \cup \partial A$.
   Ne segue che A è chiuso se e solo se $\partial A \subset A$.

3. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
   Ne segue che $\mathring{A}$ è aperto e $\overline{A}$ è chiuso.

4. *Se $A \subset B$ allora $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ e $\overline{A} \subset \overline{B}$.*
   In particolare se A è aperto (B chiuso) e $A \subset B$, allora $A \subset \mathring{B}$ ($\overline{A} \subset B$).

5. *Se A e B sono aperti, allora $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti. Se A e B sono chiusi, allora $A \cup B$ e $A \cap B$ sono chiusi. Inoltre, se A e B sono due insiemi generici:*

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \widehat{A \cup B}^{\circ} \quad , \quad \mathring{A} \cap \mathring{B} = \widehat{A \cap B}^{\circ} \quad , \quad \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B} \quad , \quad \overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}.$$

6. *∂A è (sempre) chiusa.*

7. $\partial \overline{A} \subset \partial A$, $\partial \mathring{A} \subset \partial A$.

8. *Si ha sempre $\partial(A \cap B) \subset (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \partial B)$. Se $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ vale l'eguaglianza:*

$$\partial(A \cap B) = (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \partial B).$$

Questo è vero se A e B sono chiusi (per (5)) e dunque:

$$\partial(A \cap B) = (\partial A \cap B) \cup (A \cap \partial B) \qquad \text{se } A \text{ e } B \text{ sono chiusi.}$$

Abbiamo visto le dimostrazioni di (5) e (8)

In particolare (8) ci servirà molto in fondo

Esempi. $D = \{x^2+y^2 \le 1, \ x \ge 0\} = A \cap B$ dove

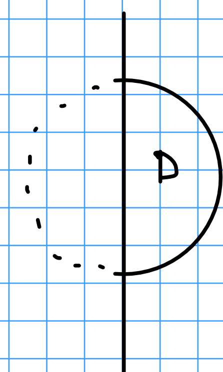
$A = \{x^2+y^2 \le 1\}$ $\quad B = \{x \ge 0\}$

Diamo per buono che A e B sono chiusi (questo seguirà da un fatto generale). Diamo anche per buono che

$\partial A = \{x^2+y^2 = 1\}$ (questo l'abbiamo visto!)

$\partial B = \{x = 0\}$ (ESERCIZIO ?)

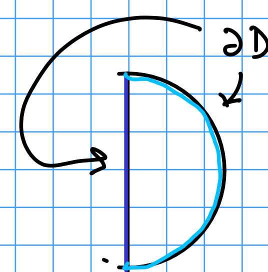
Allora:



$$\partial D = (\partial A \cap B) \cup (\partial B \cap A) =$$

$$\{x^2+y^2 = 1, \ x \ge 0\} \cup \{x^2+y^2 \le 1, \ x = 0\} =$$

$$\{x^2+y^2 = 1, \ x \ge 0\} \cup \{-1 \le y \le 1, \ x = 0\}$$



Dim di 5 Consideriamo il caso degli aperti.

Siano A e B aperti. Se $P_0 \in A \cup B$ allora $P_0 \in A$ oppure $P_0 \in B$. Dunque $\exists \, r > 0$ t.c. $B(P_0, r) \subset A$ oppure $B(P_0, r) \subset B$. IN OGNI CASO $B(P_0, r) \subset A \cup B \Rightarrow A \cup B$ aperto.

Se $P_0 \in A \cap B$, allora $P_0 \in A$ E $P_0 \in B$. Dunque esiste $r_1 > 0$ t.c. $B(P_0, r_1) \subset A$ ed esiste $r_2 > 0$ t.c. $B(P_0, r_2) \subset B$. Se prendo r = minimo tra r_1 ed r_2 ho

$$B(P_0, r) \subset A, \ B(P_0, r) \subset B \Rightarrow B(P_0, r) \subset A \cap B$$

$A \cap B$ è aperto! Vediamo le formule

- Si ha $\mathring{A} \subset A$ $\quad \mathring{B} \subset B \Rightarrow \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \cup B \Rightarrow$

$$\overbrace{\mathring{A}\cup\mathring{B}}^{\circ} \subset \overbrace{A\cup B}^{\circ}$$

Ma $\mathring{A}\cup\mathring{B}$ è aperto dunque

$$\mathring{A}\cup\mathring{B} = \overbrace{\mathring{A}\cup\mathring{B}}^{\circ} \subset \overbrace{A\cup B}^{\circ}$$

- $\mathring{A}\subset A \quad \mathring{B}\subset B \implies \mathring{A}\cap\mathring{B} \subset A\cap B \implies$ (come sopra)

$$\mathring{A}\cap\mathring{B} = \overbrace{\mathring{A}\cap\mathring{B}}^{\circ} \subset \overbrace{A\cap B}^{\circ}$$

- $$\left.\begin{array}{l} A\cap B \subset A \implies \overbrace{A\cap B}^{\circ} \subset \mathring{A} \\ A\cap B \subset B \implies \overbrace{A\cap B}^{\circ} \subset \mathring{B} \end{array}\right\} \implies \overbrace{A\cap B}^{\circ} \subset \mathring{A}\cap\mathring{B}$$

Le proprietà sui chiusi si possono ottenere passando ai complementari

$$\left(\bar{A} = \mathcal{C}(\mathring{\overbrace{\mathcal{C}A}}) \;,\; \mathring{A} = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{C}A}) \right).$$

VEDIAMO LA (8).

$$\partial A\cap B = \overline{A\cap B} \setminus \overbrace{A\cap B}^{\circ} \overset{\text{la 5}}{=} \overline{A\cap B} \setminus \mathring{A}\cap\mathring{B} =$$

$$\overline{A\cap B} \cap \mathcal{C}(\mathring{A}\cap\mathring{B}) = \overline{A\cap B} \cap \left(\mathcal{C}\mathring{A} \cup \mathcal{C}\mathring{B}\right) = \overline{A\cap B} \cap \left(\overline{\mathcal{C}A} \cup \overline{\mathcal{C}B}\right)$$

$$\underset{\text{la 5}}{\subset} \bar{A}\cap\bar{B}\cap(\overline{\mathcal{C}A}\cup\overline{\mathcal{C}B}) = (\bar{A}\cap\bar{B}\cap\overline{\mathcal{C}A}) \cup (\bar{A}\cap\bar{B}\cap\overline{\mathcal{C}B}) =$$

$$(\underbrace{\bar{A}\cap\overline{\mathcal{C}A}}_{\partial A}\cap\bar{B}) \cup (\underbrace{\bar{B}\cap\overline{\mathcal{C}B}}_{\partial B}\cap\bar{A}) = (\partial A\cap\bar{B}) \cup (\partial B\cap\bar{A})$$

- Se vale $\overline{A\cap B} = \bar{A}\cap\bar{B}$ è chiaro che vale "$=$" tra il primo e l'ultimo termine.
- Se A e B sono chiusi si ha $\bar{A}\cap\bar{B} = A\cap B$, dunque

$$\bar{A}\cap\bar{B} = A\cap B \subset \overline{A\cap B}.$$

Vale dunque

$$\bar{A}\cap\bar{B} = \overline{A\cap B}$$

e tutto torna