Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 01   27/09/2021

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Argomenti del corso

Rispetto al corso di Analisi Uno, in cui l'ambiente era $\mathbb{R}$, si andranno a studiare le proprietà degli **spazi** N**- dimensionali** e le funzioni di **più variabili**.

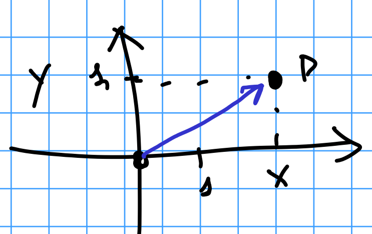
Gli argomenti si possono suddividere come segue (non necessariamente in questo ordine preciso):

- Limiti e continuità in spazi di dimensione $N > 1$.
- Calcolo differenziale per funzioni di più variabili.
- Calcolo integrale per funzioni di più variabili.
- Curve e integrali curvililinei
- Superfici e integrali di superficie.
- Elementi di calcolo differenziale sulle superfici (teoremi di Stokes e della divergenza)
- Successioni e serie di funzioni. Serie di potenze. Serie di Fourier.
- Sistemi di equazioni differenziali. Sistemi lineari.

AMBIENTE : $\mathbb{R}^N = (x_1, \dots, x_N)$

$x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$

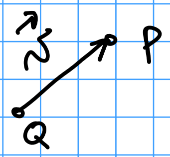
Se $N = 2, 3$ $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ sono delle "coordinate" nel piano / nello spazio



$P \to (x, y)$

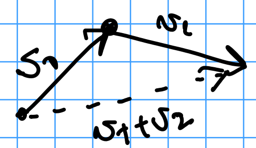
PUNTI / VETTORI

- VETTORE (APPLICATO) è sostanzialmente "la differenza tra due punti"



"$\vec{v} = P - Q$"

- I VETTORI SI POSSONO SOMMARE



FATTO ELEMENTARE $(v_1 \dots v_N) + (w_1 \dots w_N)$
$= (v_1 + w_1, \dots, v_N + w_N)$

DUNQUE HA SENSO PRENDERE

$Q + \vec{v} = P$ (punto + vettore = punto)

$v_1 + v_2$. (vettore + vettore = vettore)

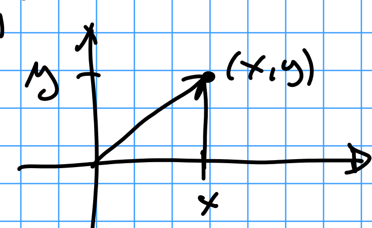
$P - Q = \vec{v}$ (punto - punto = vettore)

NOZIONE DI DISTANZA TRA PUNTI

$\longleftrightarrow$ NORMA DEI VETTORI

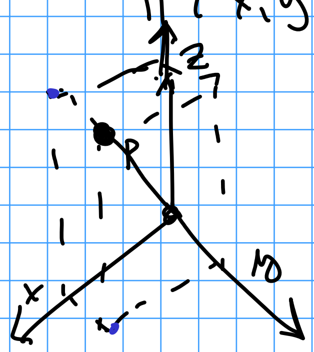
Def Se v è un vettore di componenti $v_1 \dots v_N$ la sua norma ("standard") è data da

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_N^2}$$



Se $N = 2$
$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

TEOREMA DI PITAGORA



Dunque la norma è una funzione $n(v) = \|v\|$ definita su $\mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}$, tale che:

(a) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^N$

$\|v\| = 0 \iff v = 0 = (0, \ldots, 0)$

(b) $\|t v\| = |t| \, \|v\| \quad \forall t \in \mathbb{R} \ \forall v \in \mathbb{R}^N$

(c) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE PER LA NORMA)

Vediamo la (c) nel caso di $\mathbb{R}^2$

$$(c) \iff \|v_1 + v_2\|^2 \leq (\|v_1\| + \|v_2\|)^2$$

$v_1 = (a, b) \quad v_2 = (c, d) \qquad v_1 + v_2 = (a+c, b+d)$

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 \leq \left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}\right)^2$$

$$\cancel{a^2} + \cancel{c^2} + 2ac + \cancel{b^2} + \cancel{d^2} + 2bd \leq$$

$$\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} + \cancel{c^2} + \cancel{d^2}$$

$$ac + bd \leq \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}_{\geq 0} \qquad \text{al tuo quadrato !?}$$

$$\cancel{a^2c^2} + 2abcd + \cancel{b^2d^2} \leq \cancel{a^2c^2} + a^2d^2 + b^2c^2 + \cancel{b^2d^2}$$

$$0 \leq a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = (ad - bc)^2$$

Def. (prodotto scalare) Se $v = (v_1, \ldots, v_N)$ $w = (w_1 \ldots w_N)$ definiamo il prodotto scalare

$$(v, w) = \underbrace{v \cdot w}_{} := v_1 w_1 + \cdots + v_N w_N$$

Oss. (ovvie) 1 Il prodotto scalare è "bilineare":

$$v \cdot (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 v \cdot w_1 + \lambda_2 v \cdot w_2$$

$$(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w_2 + v_2 \cdot w_2 \quad \text{e stesso discorso con } \lambda_1, \lambda_2$$

② $v \cdot w = w \cdot v$ (è simmetrico)

$v \cdot v = \|v\|^2$ DUNQUE

③ $v \cdot v \geq 0$ $\quad v \cdot v = 0 \iff v = 0$

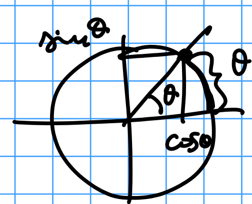
Cosa rappresenta il prodotto scalare?

IN $\mathbb{R}^2$ Notiamo che

Se $v = (x, y)$ ha norma 1 $\Rightarrow$ posso scrivere

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \quad \text{per } 0 \leq \theta < 2\pi$$

θ UNICO con queste proprietà



$\Rightarrow$ $\forall\, \underset{(x,y)}{v} \neq 0$ posso scrivere $x = \|v\| \cos\theta$

$y = \|v\| \sin\theta$

VEDIAMO IL SIGNIFICATO DEL PRODOTTO SCALARE (sempre in $\mathbb{R}^2$)

v e v' in $\mathbb{R}^2$ di coordinate (x, y) (x', y')

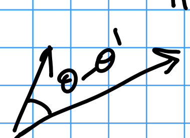
$v \cdot v' = x x' + y y'$

so che $v = \|v\| (\cos\theta, \sin\theta)$

$v' = \|v'\| (\cos\theta', \sin\theta')$

$\Rightarrow$ $v \cdot v' = \|v\| \|v'\| (\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta') =$

$\|v\| \|v''\| \cos(\theta - \theta')$ $\leftarrow$ PRODOTTO TRA LE NORME PER IL COSENO DELL'ANGOLO TRA v e v'



DUNQUE (almeno in $\mathbb{R}^2$) $|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$

VALE IN $\mathbb{R}^N$

<u>Teorema</u> (disuguaglianza di Schwartz) Se $v, w \in \mathbb{R}^N$

$$v \cdot w \leq \|v\| \|w\|$$

(IN REALTÀ - come vedremo dalla dim - la proprietà dipende <u>solo</u> dalle proprietà formali del prodotto scalare ① ② ③

DUNQUE LA DISUGUAGLIANZA VALE IN OGNI SPAZIO VETTORIALE CON UN PRODOTTO SCALARE)

<u>Dim</u> Se $v = 0$ la dis. è vera. Suppong. $v \neq 0$.

Considero la seguente funzione di $t (\in \mathbb{R})$

$$h(t) = \underbrace{\| w - t v \|^2}, \qquad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

$h(t) \geq 0$ per la proprietà ③ del prod. scal.

$$h(t) = (w - tv) \cdot (w - tv) = w \cdot w - (tv) \cdot w - w (tv) + (tv)(tv)$$

$$\|w\|^2 - 2t\, v \cdot w + t^2 \|v\|^2 \quad \leftarrow \text{polinomio in } t \text{ di secondo grado}$$

DEVE AVERE $\Delta \leq 0$!!

$$4 (v \cdot w)^2 - 4 \|v\|^2 \|w\|^2 \leq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(v \cdot w)^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$$

$$\Updownarrow$$

$$|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\| \quad !!!$$

<u>OSS.</u> Se vale l'eguaglianza $|v \cdot w| = \|v\| \|w\|$ (e $v \neq 0$)

allora il Δ del trinomio di sopra vale zero

$\Rightarrow \exists\ \bar{t} \in \mathbb{R}$ tale che $h(\bar{t}) = 0 \iff$

$$\| w - \bar{t} v \|^2 = 0 \iff w = \bar{t} v$$

cioè v e w sono <u>allineati</u>

(se voglio risparmiarmi l'ipotesi $v \neq 0$ posso dire

$$| v \cdot w | = \| v \| \cdot \| w \| \iff v \text{ e } w \text{ linearmente dipendenti}$$

DALLA DIS. DI SCHWARTZ DEDUCO

$$\otimes \quad \| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$$

<u>INFATTI</u> $\otimes \iff \| v + w \|^2 \leq (\| v \| + \| w \|)^2$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{\| v \|^2} + 2\, v \cdot w + \cancel{\| w \|^2} \leq \cancel{\| v \|^2} + 2 \| v \| \| w \| + \cancel{\| w \|^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$v \cdot w \leq \| v \| \cdot \| w \| \quad \leftarrow \text{SCHWARTZ}$$

(la dis. triangolare per la norma VALE in ogni spazio vettoriale con una norma che proviene da un prodotto scalare)

INOLTRE si può definire l'angolo θ tra due vettori $v, w \neq 0$ dalla relazione

$$\cos \theta = \frac{v \cdot w}{\| v \| \| w \|} \leftarrow \text{sta tra } -1 \text{ e } 1$$

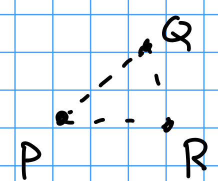
Se P e Q sono due punti di $\mathbb{R}^N$ definisco la distanza tra P e Q ponendo

$$\operatorname{dist}(P,Q) = \|P-Q\| = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + \dots (p_N-q_N)^2}$$

$$P = (p_1 \dots p_N) \qquad Q = (q_1 \dots q_N)$$

La distanza verifica le proprietà:

- $\operatorname{dist}(P,Q) \geq 0$, $\operatorname{dist}(P,Q) = 0 \iff P = Q$
- $\operatorname{dist}(Q,P) = \operatorname{dist}(P,Q)$
- $\operatorname{dist}(Q,R) \leq \operatorname{dist}(Q,P) + \operatorname{dist}(P,R)$



(DIS. TRIANGOLARE)

Def. v e w si dicono ortogonali se $v \cdot w = 0$

IN QUESTO CASO $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

OSS. In $\mathbb{R}^N$ ci sono i vettori $\hat{e}_1 \dots \hat{e}_N$ def. da

$$\hat{e}_1 = (1,0 \dots 0), \quad \hat{e}_2 = (0,1,0 \dots 0), \quad \dots, \quad \hat{e}_N = (0 \dots 0,1)$$

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0 \qquad (e_i \cdot e_i = \|e_i\|^2 = 1)$$

Se prendo $v \in \mathbb{R}^N$ generico $v = (v_1, \dots, v_N) \Rightarrow$

$$v = v_1 \hat{e}_1 + \dots + v_N \hat{e}_N \Rightarrow \|v\|^2 = \|v_1 \hat{e}_1 + \dots + v_N \hat{e}_N\|^2 = v_1^2 \underbrace{\|e_1\|^2}_{=1} + \dots + v_N^2 \underbrace{\|e_N\|^2}_{=1} = v_1^2 + \dots + v_N^2$$

TUTTI ORTOGONALI

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_N^2}$$

DISCHI Se $P_0 \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ chiamo

$$B(P_0, r) = \{ P \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(P_0, P) < r \}$$

$= \{ P \in \mathbb{R}^N : \| P - P_0 \| < r \}$

(disco (aperto) di centro P_0 e raggio r)

IN $\mathbb{R}^2$

$\overline{B}(P_0, r) = \{ P \in \mathbb{R}^N : \| P - P_0 \| \leq r \}$

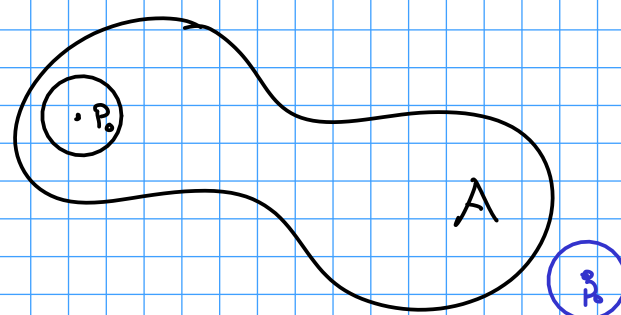
<u>Sfera</u> di centro P_0 e raggio $r > 0$

$S(P_0, r) = \{ P \in \mathbb{R}^N : \| P - P_0 \| = r \}$

<u>DEFINIZIONI</u> Considero $A \subset \mathbb{R}^N$ $P_0 \in \mathbb{R}^N$

Dico che

- P_0 è $\boxed{\text{INTERNO}}$ ad A se esiste $r > 0$ tale che $B(P_0, r) \subset A$



(in particolare $P_0 \in A$)

- P_0 è $\boxed{\text{ESTERNO}}$ ad A se esiste $r > 0$ tale che $B(P_0, r)$ "è tutto fuori da A" cioè $B(P_0, r) \cap A = \emptyset$

IN ALTRI TERMINI P_0 è INTERNO A $\complement A$

dove $\complement A$ è il complementare di A cioè $\complement A = \{ P : P \notin A \}$

- Se P_0 NON È NÉ INTERNO NÉ ESTERNO DIRÒ CHE P_0 È PUNTO DI FRONTIERA PER A

PONGO ALLORA

- PARTE INTERNA DI A $= \mathring{A} = \{P : P$ INTERNO AD A$\}$
- PARTE ESTERNA $= \{P : P$ ESTERNO AD A$\} = \mathring{C A}$
- FRONTIERA DI A $= \partial A = \{P : P$ è di frontiera per A$\}$

Si vede per esempio che, se $A = B(P_0, r)$

$$\mathring{A} = A$$ (tutti i punti di $B(P_0,r)$ sono interni a $B(P_0,r)$)

$$\partial A = S(P_0, r)$$

$$\mathring{\overline{B}(x_0,r)} = B(x_0,r)$$

$$\partial \overline{B}(x_0,r) = S(x_0,r)$$

STOP