Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 70 25/05/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Forma di Jordan $A = M J M^{-1}$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_m \end{bmatrix}$$

dove ogni J_i è un blocco di Jordan del tipo $J_k(\lambda)$ cioè

$$J_k(\lambda) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}}_{k} \Big\} k$$

NON È DETTO CHE I λ siano diversi dunque può essere

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & & & & & \\ & \lambda & 1 & & & & & & \\ & & \lambda & & & & & & \\ & & & \lambda & 1 & & & & \\ & & & & \lambda & & & & \\ & & & & & \mu & 1 & & \\ & & & & & & \mu & & \\ & & & & & & & \mu & \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

- Quanti blocchi hanno λ ?! TANTI QUANTI $m_G(\lambda)$ e cioè

OGNI λ produce $m_G(\lambda)$ blocchi di Jordan

(m_G = numero di autovettori lin. indip. CIOÈ $\boxed{m_G(\lambda) = \dim \ker(A-\lambda I)}$

- CI SONO DUE CASI ESTREMI :

(1) (quello più favorevole) $m_G(\lambda) = m_A(\lambda) = m \Rightarrow$

$\dim \ker(A-\lambda I) = m$. La parte di J che riguarda λ

è $\begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$ (m blocchi del tipo $J_1(\lambda) = [\lambda]$)

(2) (caso opposto) $m_G(\lambda) = 1 < m_A = m$

Ho un solo blocco relativo a λ e cioè

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

NEGLI ALTRI CASI HO m_G blocchi $J_{K_1}(\lambda) \dots J_{K_{m_G}}(\lambda)$

con $K_1 + \dots + K_{m_G} = m_A$

$$\left.\begin{matrix} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \ddots & \\ & & & \square \end{matrix}\right\} m_K$$

COME SI RAGIONA IN QUESTI CASI INTERMEDI

Ricorda che ogni blocco $J_K(\lambda)$ è associato a una "sequenza" di vettori $e_K \xrightarrow{B} e_{K-1} \xrightarrow{B} e_{K-2} \to \cdots \xrightarrow{B} e_1 \xrightarrow{B} 0$ $(e_i \neq 0)$

$B = (A - \lambda I)$ (e_1 è un autovalore) $e_i \in \ker B^i$

<u>COME SI DOVREBBE FARE IN GENERALE</u>

• Sia λ un autovalore. Poniamo $B = A - \lambda I$

Troviamo $m_G = \dim \operatorname{Ker} B$

• Facciamo le potenze di B: $B \quad B^2 \quad B^3 \dots$

fino a quando $\dim \operatorname{Ker} B^{k-1} \neq \dim \operatorname{Ker} B^k = \dim \operatorname{Ker} B^{k+1}$

(cioè troviamo il primo k intero per cui $\dim \operatorname{Ker} B^k = \dim \operatorname{Ker} B^{k+1}$

$k \geq 1$ – se $k = 1$ vuol dire che $m_G = m_A$)

(Si dimostra che se $\dim \operatorname{Ker} B^k = \dim \operatorname{Ker} B^{k+1} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} B^q = \dim \operatorname{Ker} B^k \quad \forall q \geq k$)

Si dimostra che $k \leq m_A$). Si dim che $\boxed{\dim \operatorname{Ker} B^k = m_A}$ si dimostra

• Indichiamo $m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1} < m_k = m_A(\lambda)$ le dimensioni di $\operatorname{Ker} B^i$

$$\underbrace{\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Ker} B & \subset & \operatorname{Ker} B^2 & \subset \dots \subset & \operatorname{Ker} B^{k-1} & \subset & \operatorname{Ker} B^k \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\ \dim = m_1 & & \dim = m_2 & & \dim m_{k-1} & & m_k = m_A(\lambda) \end{array}}_{k \text{ elementi e potenze}}$$

Prendo il massimo numero possibile di vettori linearmente indipendenti in $\operatorname{Ker} B^k$ ma non in $\operatorname{Ker} B^{k-1}$ $(\neq 0)$

(ce ne sono esattamente $\underbrace{m_k - m_{k-1}}_{n_k} = m_A(\lambda) - m_{k-1}$)

$$\begin{array}{ccccl} \boxed{e^{k,1} \quad \dots \quad e^{k,n_k}} & & & & \in \operatorname{Ker} B^k \setminus \operatorname{Ker} B^{k-1} \\ B \downarrow \qquad\qquad B \downarrow & & & & \\ \boxed{e^{k-1,1} \quad \dots \quad e^{k-1,n_k}} & & \boxed{e^{k-1,n_k+1} \quad \dots \quad e^{k-1,m_{k-1}}} & & \in \operatorname{Ker} B^{k-1} \setminus \operatorname{Ker} B^{k-2} \\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow & & \downarrow \qquad\qquad \downarrow & & \\ B \downarrow \qquad\qquad \downarrow & & \downarrow \qquad\qquad \downarrow & & \\ B \downarrow \qquad\qquad \downarrow & & \downarrow \qquad\qquad \downarrow & & \\ e^1 \qquad\qquad e^1 & & e^1 \qquad\qquad e & & \\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow & & \downarrow \qquad\qquad \downarrow & & \\ 0 \qquad\qquad 0 & & 0 \qquad\qquad 0 & & \end{array}$$

k

sequenza lunga $k-1 \Rightarrow$ blocchi $J_{k-1}(\lambda)$

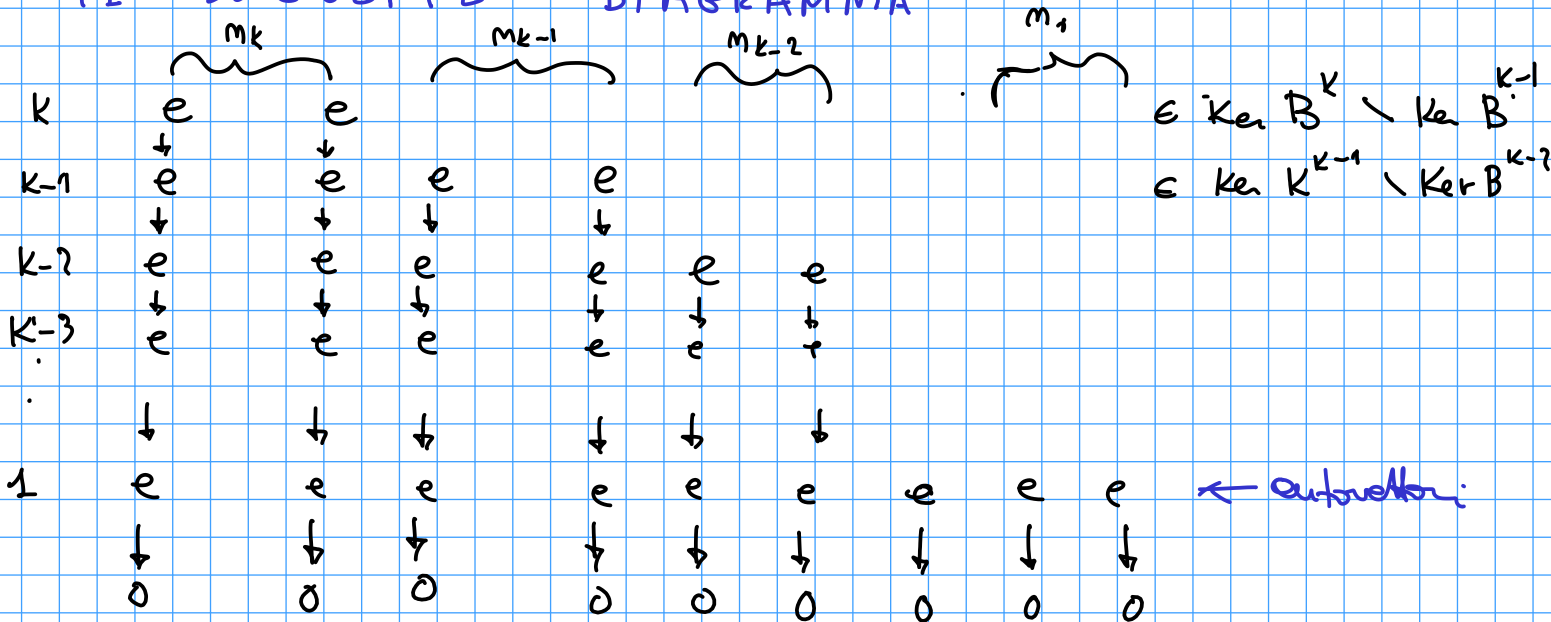
sequenza di k elementi che partono da $e^{k,1} \dots e^{k,n_k} \rightarrow n_k$ blocchi di dimensione k

• Vado a vedere $\operatorname{Ker} B^{K-1}$ ← ha dimensione m_{K-1}.

Dentro questo Ker ho $B e^{K,i}$ ($e^{K,i}$ sono stati trovati sopra). Questi non sono in $\operatorname{Ker} B^{K-2}$ perché gli $e^{K,i}$ non sono in $\operatorname{Ker} B^{K-1}$. PERÒ può essere che $\dim \operatorname{Ker} B^{K-1} > m_K$. DUNQUE posso aggiungere degli altri vettori linearmente indipendenti $e^{K-1,m_K+1} \dots e^{K-1,m_{K-1}}$ in modo da trovare il numero massimo di vettori linearmente indipendenti in $\operatorname{Ker} B^{K-1} \setminus \operatorname{Ker} B^{K-2}$

Da ognuno di questi costruisco una sequenza di lunghezza $K-1$

CONTINUO COSÌ FINO A COSTRUIRE IL SEGUENTE DIAGRAMMA



$\Rightarrow$ ho m_K blocchi $J_K(\lambda)$ $\quad m_{K-1}$ blocchi $J_{K-1}(\lambda) \dots$

m_1 blocchi $J_1(\lambda)$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_K = m_G(\lambda)$$

$$m_1 + m_2 \cdot 2 + \dots + m_K \cdot K = m_A(\lambda)$$

TUTTO QUESTO VA RIFATTO PER OGNI $\lambda \Rightarrow m_A(\lambda_1) + \dots + m_A(\lambda_m) = N$

TORNIAMO AGLI ESEMPI IN DIMENSIONE $N=3$

Nel caso visto ieri: UN SOLO AUTOVALORE λ. $(m_A = 3)$
forse - se mo vediamo.

$$\boxed{B = A - \lambda I \quad \text{aveva rango } 2.}$$

$\Rightarrow$ c'è un solo autovettore $\Rightarrow$ una sola sequenza

$$e_3 \xrightarrow{B} e_2 \xrightarrow{B} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{autovettore}}}{e_1} \xrightarrow{B} 0$$

$\Longleftrightarrow \quad \dim \operatorname{Ker} B = 1 \quad \dim \operatorname{Ker} B^2 = 2 \quad \dim \operatorname{Ker} B^3 = 3$

$\Updownarrow$

$B^3 = 0$ (siamo in $\mathbb{R}^3$)

IN QUESTO CASO PER TROVARE e_1 e_2 e_3 si può fare come ieri:

- trovo $e_3 \in \operatorname{Ker} \underset{\mathbb{R}^3}{\overset{\shortparallel}{B^3}} \setminus \operatorname{Ker} B^2$ (cioè $e_3 \in \mathbb{R}^3$ con $B^2 e_3 \neq 0$)
- chiamo $e_2 = B e_3$ $\quad e_1 = B e_2 = B^2 e_3$

In alternativa (IN QUESTO CASO IN CUI HO UNA SOLA sequenza) trovo $e_1 \in \operatorname{Ker} B$ (un autovettore) e cerco

$e_2 : B e_2 = e_1$, $e_3 : B e_3 = e_2$ CI RIESCO PERCHÉ C'È UN SOLO e_1 possibile (a meno di multipli)

ALTRO ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 9 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -5-\lambda & 9 & 0 \\ -4 & 7-\lambda & 0 \\ -2 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -5-\lambda & 9 \\ -4 & 7-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\left((-5-\lambda)(7-\lambda) + 36\right) = (1-\lambda)\left(-35 - 2\lambda + \lambda^2 + 36\right) =$$

$$(1-\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2) = (1-\lambda)^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{UN SOLO AUTOVALORE } \lambda = 1}$$

- $B = (A - I) = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ← ha rango 1 $\iff$ $\underline{\underline{\dim \ker B = 2}}$

lin. dip

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{-3}{2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- due autovettori lin. indip.

Devo avere due sequenze $e_3 \xrightarrow{B} e_2 \xrightarrow{B} 0$ $\quad e_1 \xrightarrow{B} 0$

UN BLOCCO $J_2(1)$ e uno $J_1(1)$

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Necessariamente $B^2 = 0$ (ker B^2 ha dim 3)

(Se la matrice fosse 5×5 e avesse $m_G = 2$ - ker B di dim 2 -

$e_5 \to e_4 \to e_3 \to e_2$ $\quad e_1$

OPPURE

$e_5 \to e_4 \to e_3$ $\quad e_2 \to e_1$)

- TROVO e_3 tale che $\underline{\underline{B e_3 \neq 0}}$ Posso prendere

$$e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B e_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

OPPURE

$$\Rightarrow \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B e_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

MI MANCA e_1

Devo trovare $e_1 \in \ker B$ indipendente da e_2!!

$$\left.\begin{array}{lll} \ker B^2 \setminus \ker B & e_3 & \\ & \downarrow & \\ \ker B \setminus \{0\} & e_2 & e_1 \end{array}\right)$$

Se $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad e \in \ker B \Longrightarrow$

$$\begin{cases} -6x + 9y = 0 \\ -4x + 6y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases} \qquad 9y = 6x \qquad \boxed{3y = 2x}$$

Se scelgo $z = 0$ trovo e_1 indip. da e_2

$$x = 3 \quad y = 2 \quad z = 0 \qquad \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1}$$

A QUESTO PUNTO DEFINISCO $M = \left[e_1 | e_2 | e_3 \right] = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad J = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & & 1 \end{array}\right]$$

Supponiamo di dover risolvere

$$\begin{cases} x' = -5x + 9y \\ y' = -4x + 7y \\ z' = -2x + 3y + z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{array} \qquad Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

$$Y_0 = Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_3 \quad !! \qquad e_3 = M \hat{e}_3 \iff M^{-1} e_3 = \hat{e}_3$$

$$Y(t) = e^{tA} Y_0 = M e^{tJ} \underbrace{M^{-1} Y_0}_{\hat{e}_3} = M e^{tJ} \hat{e}_3 =$$

$$e^t M \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&t\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\6\\1\end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix}3&9&0\\2&6&1\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\t\\1\end{bmatrix} =$$

$$e^t\begin{bmatrix}9t\\6t+1\\3t\end{bmatrix} \quad . \quad \begin{aligned} x(t) &= 9te^t\\ y(t) &= 6te^t + e^t\\ z(t) &= 3te^t\end{aligned}$$

VERIFICA

$$x'(t) = 9e^t + 9te^t = 9(1+t)e^t$$
$$y'(t) \quad 6(1+t)e^t + e^t = (7+6t)e^t$$
$$z'(t) = 3(1+t)e^t$$

$$-5x+9y = -45te^t + 54te^t + 9e^t = 9te^t + 9e^t = x'(t)$$
$$-4x+7y = -36te^t + 42te^t + 7e^t = 6te^t + 7e^t = y'(t)$$
$$-2x+3y+z = -18\cancel{te^t} + 18\cancel{te^t} + 3e^t + 3te^t = 3e^t + 3te^t = z'(t)$$

TORNA

ALTRO ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix}-6&10&1\\-5&8&1\\-2&3&1\end{bmatrix}$$

polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det\begin{bmatrix}-6-\lambda&10&1\\-5&8-\lambda&1\\-2&3&1-\lambda\end{bmatrix} = -(6+\lambda)(8-\lambda)(1-\lambda) + 10\cdot1\cdot(-2) + 1(-5)3 - \left[-(6+\lambda)\cdot3\cdot1 + (-5)10(1-\lambda) + (-2)1(8-\lambda)\right]$$

$$= -(6+\lambda)(8-9\lambda+\lambda^2) - 20 - 15 - \left[-18-3\lambda-50+50\lambda-16+2\lambda\right] =$$
$$-(48-54\lambda+6\lambda^2+8\lambda-9\lambda^2+\lambda^3) - 35 - (-84+49\lambda) =$$
$$-48-35+84+(54-8-49)\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 = 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3$$

$= (1-\lambda)^3$ SOLO $\boxed{\lambda = 1}$ $m_A = 3$

- $B = A - I = \begin{bmatrix} -7 & 10 & 1 \\ -5 & 7 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ HA RANGO 2

det $\neq 0$

$\Rightarrow$ Ker B di dimensione 1 $\Rightarrow$ UNA SEQUENZA $e_3 \xrightarrow{B} e_2 \xrightarrow{B} e_1 \xrightarrow{B} 0$

STAVOLTA $\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\dim \operatorname{Ker} B}$ $\underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\dim \operatorname{Ker} B^2}$ $\underset{\substack{\parallel \\ 3}}{\dim \operatorname{Ker} B^3}$ $\Leftrightarrow B^3 = 0$

- CALCOLO B^2

$$B^2 = \begin{bmatrix} -7 & 10 & 1 \\ -5 & 7 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 10 & 1 \\ -5 & 7 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

B^2 ha rango 1 $(B^3 = 0)$

- Trovo e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$. Vediamo se $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \left(= v_{1(0)}\right)$

VA BENE! infatti

$$B^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{e_3} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = e_1$$

$$B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 10 & 1 \\ -5 & 7 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e_2$$

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

VOGLIO RISOLVERE $Y' = AY$ con $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Dato che $Y(0) = e_3 \Rightarrow M\hat{e}_3 = Y(0) \Leftrightarrow M^{-1}Y(0) = \hat{e}_3$

$$\Rightarrow Y(t) = M e^{tJ} M^{-1} Y(0) = M e^{tJ} \hat{e}_3 =$$

$$e^t M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}t^2 + 2t + 1 \\ -t^2 + t + 1 \\ -t^2/2 + t + 1 \end{bmatrix} e^t$$

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 9 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -5-\lambda & 9 & 0 \\ -4 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -(1+\lambda) \det \begin{bmatrix} -5-\lambda & 9 \\ -4 & 7-\lambda \end{bmatrix} =$$

$-(1+\lambda)(\lambda-1)^2$ DUE AUTOVALORI

$\lambda = -1$ $m_A = 1 = m_G$ (blocco $J_1(-1)$)

$\lambda = 1$ $m_A = 2$

$\boxed{\lambda = 1}$ $B = A - I = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ← HA RANGO 2

$\dim \ker B = 1$

$\Rightarrow m_G(1) = 1 \Rightarrow$ UNA SEQUENZA $e_2 \xrightarrow{B} e_1 \xrightarrow{B} 0$

Trovo e_2 tale che $e_2 \in \ker B^2$ $Be_2 \neq 0$

$$B^2 = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 9 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$\dim \operatorname{Ker} B^2 = 2$ $\quad \dim \operatorname{Ker} B^2 = 2 \quad \dim \operatorname{Ker} B^h = 2 \quad \forall h \geq 2$

$e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ deve essere $-4x + 4y + 4z = 0$

$$\boxed{x = y + z}$$

$e_2 = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad B e_2 \neq 0 \quad B \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

$e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

DEVO AGGIUNGERE $e_3 \in \operatorname{Ker}(A + I) = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -4 & 9 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} -4x + 9y = 0 \\ -4x + 8y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$x = y = 0$

z qualunque $\Rightarrow e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

#