Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 69 24/05/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Se A è una matrice $N \times N$ che ha solo autov. reali $\to$ posso trovare una matrice invertibile M e una matrice J della forma

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_K \end{bmatrix}$$

dove ogni J_K è

$$J_K = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

(λ è un autovalore) e si ha $A = M J M^{-1}$

PROBLEMA COME TROVO QUESTA FORMA ?

NOTIAMO che se $J = J_K = J_K(\lambda)$ si ha

- $\underline{J \hat{e}_1 = \lambda \hat{e}_1}$ $\quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = (\text{primo colonna}) = \begin{bmatrix} \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

  ($\hat{e}_1$ è autovettore di J)
- $J \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{e}_1 + \lambda \hat{e}_2$
- $J \hat{e}_i = \hat{e}_{i-1} + \lambda \hat{e}_i \qquad i = 2 \dots K$
- $P(\mu) = \det(J - \mu\, Id) = \det \begin{bmatrix} \lambda-\mu & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda-\mu \end{bmatrix} = (\lambda-\mu)^K \leftarrow$ HA SOLO LA RADICE $\mu = \boxed{\lambda}$

$J = J_k(\lambda)$ ha solo l'autovalore λ e un autovettore $\hat{e}_1$ (a meno di multipli). Se poniamo $B = (J - \lambda I d)$ allora

$$B\hat{e}_1 = 0 \qquad \underbrace{B\, B\hat{e}_2 = B\hat{e}_1 = 0}_{B^2\hat{e}_2 = 0} \qquad B\hat{e}_3 = \hat{e}_2 . \qquad B^3 \hat{e}_3 = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{B^i\, \hat{e}_i = 0}$$

Se $A = M J_k M^{-1}$ posto $e_i = M\hat{e}_i$

e posto $B = A - \lambda I d \implies$

$$A e_i = M J_k M^{-1} M \hat{e}_i = M J_k \hat{e}_i = M(\hat{e}_{i-1} + \lambda \hat{e}_i) = e_{i-1} + \lambda e_i$$

DUNQUE, come nel caso "base"

$$B^i e_i = (A - \lambda I)^i e_i = 0 \qquad (e_1 \text{ è autovettore, gli alt...})$$

DUNQUE, questi vettori $e_1 \dots e_k$ ($M\hat{e}_1 \dots M\hat{e}_k$) sono in questa relazione:

$$B e_1 = 0 \qquad B e_i = e_{i-1} \quad \text{per } i = 2 \dots k$$

Questo se $A = M J_k M^{-1}$ con J_k blocco di J. "elementare"

<u>NEL CASO GENERALE</u>

$$A = M J M^{-1} \qquad \text{con} \quad J = \begin{bmatrix} J' & & & \\ & J'' & & \\ & & \ddots & \\ & & & J^{(m)} \end{bmatrix}$$

$J = J_k(\lambda)$

Allora, ragionando come sopra, ogni blocco produce una sequenza $e_1 \to e_2 \dots \to e_k$ dove e_1 è autovettore di A e se $i \geq 2$ $e_i = (A - \lambda I) e_{i-1}$

E TUTTI QUESTI m vettori sono lin. indipendenti

IN DEFINITIVA PER TROVARE J e M devo dare

k autovalori e k "sequenze di vettori"

$e_{i,1} \quad e_{i,2} \quad \dots \quad e_{i,k_i}$ dove

$(A-\lambda_i I)^i e_{i,1} = 0 \qquad i = 1 \dots k_i \qquad$ ($e_{i,1}$ è autovettore di autov. λ_i)

OGNI BLOCCO PORTA UN SOLO autovettore $\qquad \left((A-\lambda_i)^{m_i} = 0 \right)$

VEDIAMO OPERATIVAMENTE ALCUNI CASI

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) • TROVIAMO GLI AUTOVALORI : $p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} =$

$$(3-\lambda) \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)\left[(2-\lambda)(4-\lambda)+1\right] =$$

$$(3-\lambda)\left[\underbrace{\lambda^2 - 6\lambda + 8 + 1}_{(\lambda-3)^2}\right] = (3-\lambda)^3 \qquad \boxed{\text{SOLO } \lambda = 3}$$

m_A

• Poniamo $B = A - \lambda I = A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(so che $\operatorname{Ker} B \neq 0$ perché λ è autovalore)

Qual è la dimensione di $\operatorname{Ker} B$?? $\Longleftrightarrow$ quanto è il rango di B

(il numero di righe (o colonne) lin. indip.) $\qquad \dim \operatorname{Ker} B = 3 - \operatorname{rango} B$

NEL NOSTRO CASO $\operatorname{rango} B = 1 \Rightarrow \boxed{\dim \operatorname{Ker} B = 2}$

m_G

(cioè due autovettori lin. indip.)

$\Rightarrow$ devo avere DUE blocchi di Jordan : $J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \leftarrow$

$$\left(\text{oppure} \quad J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

(*) (DUNQUE il numero di blocchi di J con autovalore λ mi dà la molteplicità geometrica di λ)

DUNQUE $\lambda = 3$ ha molt. algebrica 3 e molteplicità geom. 2

- Si facciano $B^2 = B \cdot B = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(però è conseguenza del teorema generale)

TROVIAMO LE "SEQUENZE" DI CUI SOPRA:

- Prendo un vettore e_3 tale che $Be_3 \neq 0$; per esempio

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{di modo che} \quad Be_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Chiamiamo $e_2 = Be_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(e_2 \in \ker B)$

dato che $B^2 = 0 \Rightarrow B B e_3 = 0 \Rightarrow B e_2 = 0 \Rightarrow e_2$ è autovettore

HO UNA PRIMA "SEQUENZA" $e_3 \xrightarrow{B} e_2 \xrightarrow{B} 0$

- Dato che $\dim \ker B = 2$ posso trovare $e_1 \in \ker B$ che sia linearmente indipendente da e_2

Vediamo come è fatto $\ker B$. $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker B \iff$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = z \quad . \text{ Dunque}$$

$e_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}$ indipendente da $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, PER esempio $e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$e_1 \xrightarrow{B} 0$, è la seconda sequenza

ALLA FINE HO TROVATO

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B} 0, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xleftarrow{B} e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e_2 \xrightarrow{B} 0$$

PONIAMO $M = \left[e_1 \,\middle|\, e_2 \,\middle|\, e_3 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(M è invertibile ....)

$$J = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

(IN ALTERNATIVA $M = \left[e_2 \,\middle|\, e_3 \,\middle|\, e_1 \right]$ $J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$)

$$\Longrightarrow \boxed{A = M J M^{-1}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

OPPURE

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$\rightsquigarrow$ studio le sol di $Y' = AY$??

ESEMPIO $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

• polinomio caratteristico.

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda+2) + 1 + 1 - (-\lambda + 2+\lambda + 1+\lambda) =$$

$$-\lambda(\lambda^2+3\lambda+2)+2-(\lambda+3) =$$

$$-\lambda^3-3\lambda^2-2\lambda+2-\lambda-3 = -\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1 = -(\lambda+1)^3$$

solo l'autovalore $\boxed{\lambda=-1}$ $(m_A = 3)$

• Poniamo $B = A+I = \begin{bmatrix} 1&-1&1\\1&0&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}$

det $\neq 0$

vedo che rang $B = 2$ (la I° e la II° colonna sono lin. ind.)

$\Rightarrow$ $\boxed{\dim \ker B = 1}$ $\Rightarrow$ $B^2 \neq 0$ (mentre $B^3=0$)

→ UN SOLO AUTOVETTORE → una sequenza di lunghezza 3

$$e_3 \xrightarrow{B} e_2 \xrightarrow{B} e_1 \xrightarrow{B} 0$$

• Calcoliamo B^2

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1&-1&1\\1&0&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&-1&1\\1&0&1\\-1&1&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1&0&-1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

B^2 ha rang 1 $\Rightarrow$ $\dim \ker B^2 = 2$ (si vede che $B^3 = 0$)

• Prendo e_3 tale che $B^2 e_3 \neq 0$

per esempio $e_3 = \begin{bmatrix} 1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $B^2 e_3 = \begin{bmatrix} -1\\0\\1\end{bmatrix} =: e_1$

autovettore.

Pongo $e_2 = Be_3 = \begin{bmatrix} 1\\1\\-1\end{bmatrix}$ $\quad e_1 = Be_2 = B^2 e_3$

• Costruisco $M = [e_1 | e_2 | e_3]$

$$\left.\begin{array}{l} M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\[2ex] J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A = M J M^{-1}$$

NUMERO DI BLOCCHI con λ = NUMERO DI AUTOVETTORI con λ = $m_G(\lambda)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}}_{M^{-1}} \quad (*)$$

#

Supponiamo di avere l'eq diff. legata al secondo esempio

$$\begin{cases} x' = \quad\; -y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = -x + y - 2z \end{cases} \qquad \left(\text{se } Y = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad Y' = AY \right)$$

so che le sol. $Y(t)$ sono date da $Y(t) = e^{tA} Y_0$

al variare di $Y_0 \in \mathbb{R}^3$. DEVO CALCOLARE e^{tA}!

$$\Rightarrow \quad e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1}$$

DEVO TROVARE e^{tJ} $\qquad J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = J_3(-1)$

$J = (-1) I_d + B \qquad$ dove $B = J - (-1) I_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

IN GENERALE

COMMUTANO

$$J = J_k(\lambda) = \lambda I + B_k \quad \text{dove} \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tJ} = e^{t\lambda I + tB_k} = e^{t\lambda I} \cdot e^{tB_k} =$$

$$e^{\lambda t} I_d \cdot \underbrace{e^{tB_k}}_{??} = e^{\lambda t} \cdot e^{tB_k}$$

$$e^{tB_k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} B_k^m = I + t B_k + \frac{t^2}{2} B_k^2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} B_k^{k-1}$$

MA le potenze di B_k sono facilmente calcolabili: se $i = 1 \dots k-1$

$$B_k^i = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \scriptstyle i+1 \\ \downarrow \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} & \leftarrow i+1 \end{array} \qquad \dots \qquad B_k^{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad e^{tB_k} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{k-1}/(k-1)! \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{tJ_k(\lambda)} = e^{t\lambda} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{k-1}/(k-1)! \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Nel caso nostro

$$e^{tJ} = e^{tJ_3(-1)} = e^{-t}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1} \Longrightarrow$$

$$\boxed{e^{tA} = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}}$$

Troviamo la soluzione dell'eq. diff. con dati iniziali $x(0)=1$ $y(0)=z(0)=0$

cioè $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. DOVREI CALCOLARE $M e^{tJ} M^{-1} Y_0$.

Posso notare (CASO FORTUNATO!) che $Y_0 = e_3$ (terza colonna di M) cioè $Y_0 = M\hat{e}_3 \Longleftrightarrow M^{-1} Y_0 = \hat{e}_3$. Quindi

$$M e^{tJ} M^{-1} Y_0 = M e^{tJ} \hat{e}_3 =$$

$$e^{-t} M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-t} \begin{bmatrix} -t^2/2 + t + 1 \\ t \\ -t \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{aligned} x(t) &= e^{-t}\left(1 + t - t^2/2\right) \\ y(t) &= e^{-t} t \\ z(t) &= -e^{-t} t \end{aligned}$$

Si potrebbe verificare se effettivamente ho trovato una soluzione

ESERCIZIO ANALOGO: Eq. diff. legata alla matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{M^{-1}}$$

$$\sim \begin{cases} x' = 3x - 2y + 2z \\ y' = 2y + z \\ z' = -y + 4z \end{cases}$$

Dalla fattorizzazione vedo che mi serve e^{tJ}

$$\therefore \quad J = \begin{bmatrix} J_1(3) & 0 \\ 0 & J_2(3) \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1(3)} & 0 \\ 0 & e^{tJ_2(3)} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{tJ_1(3)} = \left[e^{3t} \right] = e^{3t} \left[1 \right] \\ e^{tJ_2(3)} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow e^{tJ} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad e^{tA} = e^{3t} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

ESERCIZIO: trovare la sol. di questa equazione con $Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (bisogna calcolare M^{-1})

e verifico se torna