Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 68   19/05/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

(P.L.O) $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ Nota: posso supporre $t_0 = 0$.

$\Rightarrow$ la sol. è data da $Y(t) = e^{tA} Y_0$ (senno $e^{(t-t_0)A} Y_0$)

PROBLEMA: Calcolare la matrice esponenziale e^A

FATTI ① Se $A = M A_1 M^{-1} \Rightarrow e^A = M e^{A_1} M^{-1}$

② Se $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \Rightarrow$
$e^A = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_N})$

Da (1) e (2) ricaviamo che se A è diagonalizzabile,

cioè se esistono M e D con M invertibile e D diagonale $= \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N)$

per cui $A = M D M^{-1} \Rightarrow$

$$e^A = M e^D M^{-1} = M\, \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_N})\, M^{-1}$$

Ricordiamo che A diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esiste una base di $\mathbb{R}^N$ fatta da autovettori di A. In altri termini esistono

$\lambda_1 \dots \lambda_N \in \mathbb{R}$ (poi vedremo il caso complesso)

(non necessariamente distinti) ed esistono $e_1 \dots e_N \in \mathbb{R}^N$,

$\boxed{\text{linearmente indipendenti}}$ (dunque non nulli), tali che

$$A e_i = \lambda_i e_i \qquad i = 1 \dots N$$

IN QUESTO CASO $\quad D = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N)$

$$M = \left[e_1 | e_2 | \dots | e_N \right] \qquad (M^{-1} \text{ me lo devo calcolare...})$$

(si noti che $M \hat{e}_i = e_i \iff M^{-1} e_i = \hat{e}_i$ e dunque

$$A e_i = M D M^{-1} e_i = M D \hat{e}_i = M(\lambda_i \hat{e}_i) = \lambda M \hat{e}_i = \lambda e_i \,)$$

$$\Rightarrow e^A = M \,\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_N}) M^{-1}$$

- CASI IN CUI SO CHE A è diagonalizzabile:
  (1) A ha N autovalori <u>distinti</u> ($\Rightarrow$ i corrispondenti autovettori sono lin. indipendenti)

  (2) A è simmetrica. $\Rightarrow$ so che A ha tutti autov. reali e ha una base di autovettori <u>ortonormali</u> $e_1 \dots e_N$

  Allora $M = [e_1 | \dots | e_N]$ e $M^{-1} = M^T$ (la trasposta)

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{SIMMETRICA}$$

Proviamo a calcolare e^A

- Cerchiamo gli autovalori. Il polinomio caratt. è

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

$$p(\lambda)=0 \iff 1-\lambda = \pm 2 \qquad \lambda = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

DUNQUE $\quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^D = \begin{bmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}$

Cerchiamo gli autovettori. Quello corrispondente a $\lambda = 3$

$$A e_1 = 3 e_1 \qquad e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = y$$

Se lo voglio di norma 1 posso prendere $e_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Dato che e_2 deve essere ortogonale a e_1 posso prendere

$$e_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \left(\text{Verifica: } A e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -e_2 \right)$$

DUNQUE

$$M = \begin{bmatrix} e_1 \,|\, e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = M^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad tA = M\, tD\, M^{-1} = M \begin{bmatrix} 3t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix} M^{-1}$$

$$e^{tA} = M \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} M^{-1} =$$

$$M \underbrace{\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{3t}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{3t}+e^{-t}, & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{bmatrix} = e^{tA}$$

FACCIAMO LA VERIFICA di $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{3t}-e^{-t}, & 3e^{3t}+e^{-t} \\ 3e^{3t}+e^{-t}, & 3e^{3t}-e^{-t} \end{bmatrix}$$

TORNA

$$A e^{tA} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{3t}-e^{-t}, & 3e^{3t}+e^{-t} \\ 3e^{3t}+e^{-t}, & 3e^{3t}-e^{-t} \end{bmatrix}$$

DUNQUE SE DEVO RISOLVERE

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \underline{Y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} Y \\ Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

TROVO $Y(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(in effetti $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ è un autovettore relativo a -1

Se Y_0 è un autovettore di A, con autovalore $\lambda_0 \Rightarrow Y(t) = e^{\lambda_0 t} Y_0$

se prendo $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$Y(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{3t}+e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} \end{bmatrix}.$$

· IN GENERALE NON È DETTO CHE A SIA DIAGONALIZZABILE.

Supponiamo per ora che A abbia solo autovalori reali
(se no tutto quello che facciamo va ambientato nei complessi)

$\Leftrightarrow$ il pol. caratteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ha solo sol. reali

$\Rightarrow$ esistono $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_k$ sol. di $p(\lambda) = 0$

esistono $m_1, \dots, m_k$ interi, detti molteplicità dei λ_i ALGEBRICHE

tali che $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ $(m_1 + \dots + m_k = N)$

$(m_i = m_A(\lambda_i))$ m_A = molteplicità algebrica

· Se λ_i è un autovalore $\Rightarrow$ esiste almeno un autovettore relativo.

Chiamo molteplicità geometrica

$$m_G(\lambda_i) = \text{numero di } e_i \text{ linearmente indip relativi a } \lambda_i$$

$$= \dim\big(\underbrace{\operatorname{Ker} A - \lambda_i I d}_{\text{autospazio di } \lambda_i}\big) \geq 1$$

(e autovalore $\Leftrightarrow (A - \lambda I d) e = 0 \Leftrightarrow e \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I d)$)

In generale $m_A(\lambda_i) \geq m_G(\lambda_i)$. Se sono eguali per ogni $\lambda_i \Rightarrow$ A è diagonalizzabile.

IN GENERALE SI PUÒ TROVARE LA "FORMA DI JORDAN" per A.

<u>NOTAZIONE</u> & $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ INDICO

$$J_k(\lambda) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}}_{k} \Bigg\} k$$

Blocco di Jordan di dim. k, di autov. λ.

<u>TEOREMA</u> Dato A qualunque, che abbia solo autov. reali, $\Rightarrow$

$\exists$ M invertibile $\underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_k}$ $\in \mathbb{R}$, $m_1 \dots m_k \in \mathbb{N}$ t.c.
$m_1 + \dots + m_k = N$ e
non tra loro distinti

$$A = M J M^{-1} \quad \text{dove}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{bmatrix} \qquad J_i = J_{m_i}(\lambda_i) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}}_{m_i}$$

$\mathrm{Diag}[J_1, J_2 \dots J_k]$

(se $m_j = 1$ ho solo $[\lambda_i]$)

Per esempio
$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & & & & & & \\ & & & 2 & 1 & & & & \\ & & & 0 & 2 & & & & \\ & & & & & 2 & & & \\ & 0 & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

FATTO Se $A = M J M^{-1}$ con J come sopra $\Rightarrow$

$$e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1} \qquad e^{tJ} = \mathrm{Diag}\left[e^{tJ_1} \dots e^{tJ_k}\right]$$

Quindi: rimane da capire com'è fatto

$$e^{t\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}} = ??$$

(dunque dobbiamo ① trovare M e J ② calcolare gli esponenziali