Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 67 18/05/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

SISTEMI DI EQ. LINEARI

(FORMA NORMALE!!)

IL PROBLEMA:

$$(P.L.)\begin{cases} (E) & Y' = A(t)Y + B(t) & (t \in I) \\ (C.I.) & Y(t_0) = Y_0 & (t_0 \in I,\ Y_0 \in \mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Qui A è una funzione continua da $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto a valori nelle matrici $N \times N$

$$\underset{\mathbb{R}}{t} \to \underset{\mathcal{M}(N\times N)}{A(t)}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1N}(t) \\ \vdots & & \\ a_{N1}(t) & \cdots & a_{NN}(t) \end{bmatrix}$$ dove $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ continue, $i,j = 1 \ldots N$

B è una funzione continua da $t \in I$ a valori in $\mathbb{R}^N$

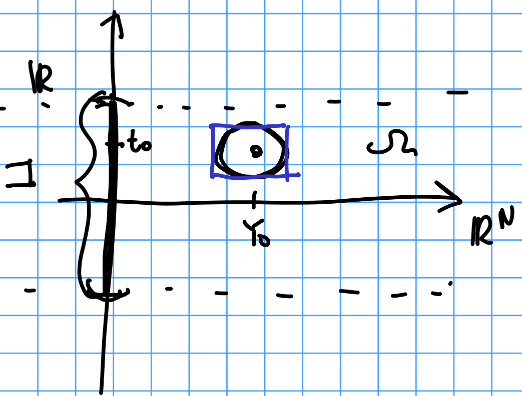
$$t \to B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{bmatrix}$$ $b_i : I \to \mathbb{R}$ continue, $i = 1 \ldots N$

Questo (P.L.) ricade nel caso generale visto ieri, se si pone

$\Omega := \mathbb{R}^N \times I$ e $\boxed{F(Y,t) := A(t)Y + B(t)}$

Ω è un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$; F è continua rispetto a (Y,t);

F è localmente lipschitziana in Y unif. rispetto a t INFATTI



(di solito si pensa a t come la prima var.)

Prendiamo $P_0=(Y_0,t_0)\in\Omega$ e $R>0$ in modo che $\overline{B(P_0,R)} \subset \Omega$. Si ha

$$\overline{B_{N+1}(P_0,R)} \subset B_N(Y_0,R)\times[t_0-R,t_0+R] \subset \underset{\mathbb{R}^N\times I}{\Omega}$$

$$\iff [t_0-R,t_0+R] \subset I$$

Allora dato che $A(t)$ è continua in t $\Rightarrow$ $\|A(t)\|$ è continua in t $\Rightarrow$ (per Weierstrass) $\Rightarrow \exists$. $M = \max_{t\in\underbrace{[t_0-R,t_0+R]}_{\text{chiuso e limitato}}} \|A(t)\|$.

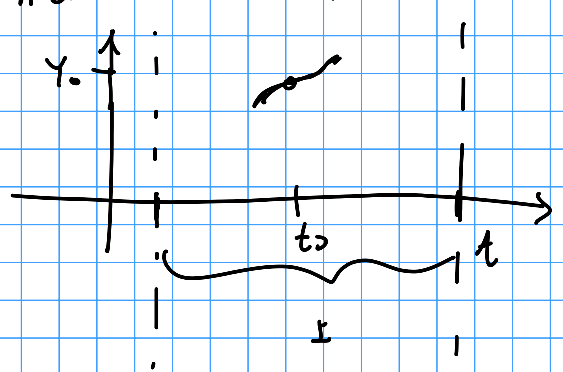
Allora se $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^N$ e $t\in[t_0-R,t_0+R]$ $\left(\Leftarrow (Y_1,t),(Y_2,t)\in B(P_0,R)\right)$

$$\|F(Y_1,t)-F(Y_2,t)\| = \|A(t)Y_1 + \cancel{B(t)} - A(t)Y_2 - \cancel{B(t)}\| =$$
$$\|A(t)(Y_1-Y_2)\| \leq \|A(t)\|\,\|Y_1-Y_2\| \leq M\,\|Y_1-Y_2\|$$

Dunque F è lipsch. in Y unif rispetto a t . IN $B(P_0,R)$ $\Rightarrow$ vale il teorema di Cauchy.

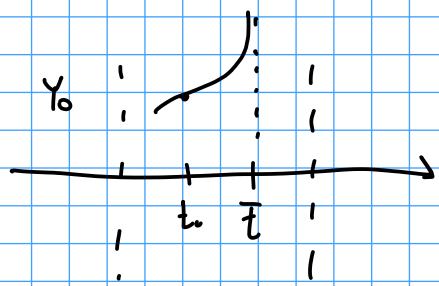
$\boxed{\text{PROP}}$

DUNQUE PER IL Problema (P.L.) vale il teorema di esistenza e unicità locale



(RIMETTO t nelle ascisse)

IN REALTÀ POSSO DIRE DI PIÙ



NON PUÒ SUCCEDERE (*)

PROPRIETÀ (2) Se $Y_0 \in \mathbb{R}^N$ e $t_0 \in I$ $\Rightarrow$ la soluzione massimale di (P.L.) (con condizione $Y(t_0) = Y_0$) $\boxed{\text{è definita su tutto } I}$

(*) (Con un'opportuna stima si vede che non è possibile, se $\bar{t} \in I$

$$\lim_{t \to \bar{t}} \|Y(t)\| = +\infty$$

Fino a che sono definiti $A(t)$ e $B(t)$ $\Rightarrow$ è definita la soluzione $Y(t)$

(3) PROPRIETÀ (derivanti dalla linearità)

Chiamiamo (E_0) l'equazione omogenea $\to$ quella con $B \equiv 0$

$$(E_0) \quad Y' = A(t)\, Y$$

(a) Se Y_1 e Y_2 sono soluzioni di (E_0), $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lambda Y_1 + \mu Y_2$ è soluzione di (E_0)

Dim. $(\lambda Y_1 + \mu Y_2)' = \lambda Y_1' + \mu Y_2' = \lambda A(t) Y_1 + \mu A(t) Y_2 = A(t)(\lambda Y_1 + \mu Y_2)$

(b) Se Y_1 è sol. di (E_0) Y_2 è sol. di (E) $\Rightarrow$ $Y_1 + Y_2$ è sol di (E)

Dim $(Y_1 + Y_2)' = Y_1' + Y_2' = A(t) Y_1 + A(t) Y_2 + B(t) = A(t)(Y_1 + Y_2) + B(t)$

(b') se Y_1 e Y_2 sono sol. di (E) $\Rightarrow$ $Y_1 - Y_2$ è sol. di (E_0)

CONSEGUENZE • Le soluzioni di (E_0) formano uno spazio vettoriale (è esattamente la (a))

• Le soluzioni di (E) formano uno spazio affine.

Detto altrimenti: poniamo $\mathcal{S}_0 = \{Y \text{ soluzioni di } (E_0)\}$ $\mathcal{S} = \{\text{sol. di } (E)\}$

- $\boxed{\mathcal{S}_0 \text{ è uno spazio vettoriale.}}$
- Se $\bar{Y} \in \mathcal{S} \Rightarrow \boxed{\mathcal{S} = \bar{Y} + \mathcal{S}_0} \Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{S} \ \exists Y_0 \in \mathcal{S}_0$ t.c. $Y = \bar{Y} + Y_0$
  - se $\bar{Y}$ è una soluzione di (E) allora ogni altra soluzione Y si esprime come $\bar{Y} + Y_0$ dove Y_0 è una opportuna sol. di (E_0)

Per risolvere (E) devo trovare:
- tutte le sol. di (E_0) $\leftarrow$ (<u>ne bastano N lin. indip.</u>)
- <u>una sol. di (E)</u>

<u>Proposizione.</u> $\mathcal{S}_0$ ha dimensione N !! In altri termini:

$\exists\, Y_1 \ldots Y_N$ sol. di (E_0) tali che

(1) <u>$Y_1 \ldots Y_N$ sono linearmente indipendenti</u>

(cioè se $\lambda_1 \ldots \lambda_N \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 Y_1(t) + \cdots + \lambda_N Y_N(t) = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow$ $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = 0$)

(2) $Y_1 \ldots Y_N$ generano $\mathcal{S}_0$

(cioè dato Y sol di (E_0) posso trovare (e sono unici a causa di (1)) dei coefficienti $\lambda_1 \ldots \lambda_N \in \mathbb{R}$ tali che

$$Y(t) = \lambda_1 Y_1(t) + \cdots + \lambda_N Y_N(t) \qquad \forall t \in I$$

<u>Dim.</u> Prendiamo $t_0 \in I$; definiamo $Y_i(t)$ come la soluzione di (E_0) avente condizione iniziale $Y_i(t_0) = \hat{e}_i$

$\left(\hat{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \right)$ So che $Y_i(t)$ esiste per Cauchy

Dimostriamo che valgono (1) e (2).

(1) Supponiamo $\lambda_1 \ldots \lambda_N \in \mathbb{R}$ tali che $\forall t \quad 0 = \lambda_1 Y_1(t) + \cdots + \lambda_N Y_N(t)$

se metto $t = t_0$ trovo $0 = \lambda_1 Y_1(t_0) + \cdots + \lambda_N Y_N(t_0) = \lambda_1 \hat{e}_1 + \cdots + \lambda_N \hat{e}_N$.

Dato che $\hat{e}_1 \ldots \hat{e}_N$ sono lin. ind in $\mathbb{R}^N \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_N = 0$. #

(2) Dimostriamo che ogni $Y(t)$ sol. di (E_0) è comb. lineare di $Y_1 \ldots Y_N$

Prendo una soluzione $Y(t)$ di (E_0) e pongo $Y_0 = Y(t_0) \in \mathbb{R}^N$

Dato che $Y_0 \in \mathbb{R}^N$ lo scrivo con $\boxed{\lambda_1 \hat{e}_1 + \dots \lambda_N \hat{e}_N = Y_0}$

(λ_i è la coordinata i-esima di Y_0)

Poniamo $\tilde{Y}(t) = \lambda_1 Y_1(t) + \dots + \lambda_N Y_N(t)$

Sicuramente $\tilde{Y}$ è una sol di (E_0) ($\mathcal{S}_0$ è uno spazio lineare)

Inoltre $\tilde{Y}(t_0) = \lambda_1 Y_1(t_0) + \dots + \lambda_N Y_N(t_0) = \lambda_1 \hat{e}_1 + \dots + \lambda_N \hat{e}_N = Y_0 = Y(t_0)$

$\tilde{Y}$ è una sol. con lo stesso dato iniziale di Y

Per l'unicità $Y(t) = \tilde{Y}(t) = \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_N Y_N$

Ho trovato che Y è comb. lineare di $Y_1 \dots Y_N$ #

$\Rightarrow$ Per trovare le sol. di (E_0) <u>basta trovarne N linearmente</u> indipendenti

QUESTO ESAURISCE LA "TEORIA" SU (P.L)

Se $N \geq 2$ $\boxed{\text{non c'è una formula}}$ per trovare le sol di (E_0)
(in effetti se ho le sol. di (E_0), c'è un procedimento per trovarne una particolare)
(Se $N = 1$ c'è la formula)

D'ORA IN POI CONSIDERIAMO IL CASO "a coeff. costanti"
CIOÈ LA MATRICE A NON DIPENDE DA t. $\Rightarrow$

$$(P.L.) \begin{cases} (E) & Y' = AY + B(t) \\ (C.I.) & Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

dove A è una matrice $N \times N$ assegnata; $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto
$B : I \to \mathbb{R}^N$ è continua, $t_0 \in I$, $Y_0 \in \mathbb{R}^N$

IN PARTICOLARE IL P.B. OMOGENEO È

$$(\text{P.L.0.})\ \begin{cases} (E) & Y' = AY \\ (C.I.) & Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

← qui posso prendere $t_0 \in \mathbb{R}$ $Y_0 \in \mathbb{R}^N$ $(I = \mathbb{R}\ !!)$

PAUSA → 12.45

Vediamo come si descrivono le sol di (P.L.0) (quando A è costante)

FATTO Supponiamo $t_0 = 0$. La sol. di (P.L.0) si scrive:

$$(**)\qquad Y(t) = e^{tA}\, Y_0 \quad --$$

dove la "matrice esponenziale" e^A è definita da

$$(*)\qquad e^A := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m \qquad \left(e^{tA} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^n}{m!} A^n \right)$$

(A è una matrice $N \times N$ e^A è un'altra matrice $N\times N$)

Vediamo allora che la def. in $(*)$ ha senso e che vale $(**)$

(1) ha senso considerare una serie di matrici perché in

$$\mathcal{M}(N\times N) = \{\text{matrici } N\times N\}$$

è definita la norma (quella solita: $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$) ⇒ è definita la nozione di limite; dunque se ho una successione di matrici A_n posso dire che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ converge se esiste una matrice S tale che

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} A_k = S \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{m} A_k - S \right\| = 0$$

(2) Dato $\mathcal{M}(N\times N)$ è completo (lo si vede; $\mathcal{M}(N\times N) \simeq \mathbb{R}^{N^2}$)

Vale il criterio di convergenza assoluta

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\| < +\infty}_{\text{(serie di numeri} \geq 0)} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} A_n}_{\text{serie di matrici}} \text{ converge}$$

(3) Nel nostro caso $A_n = A^n = \overbrace{A \cdot A \cdots A}^{n \text{ volte}}$. Ricordo che

$$\|A^n\| \le \|A\|^n \qquad \big(\|A^2 x\| \le \|A\|\,\|Ax\| \le \|A\|\|A\|\,\|x\| \Rightarrow$$
$$\|A^2\| \le \|A\|^2 \text{, lo rifaccio } n \text{ volte} \dots \big)$$

Dunque se applico il criterio di conv. assoluta

$$\left\|\frac{A^n}{n!}\right\| \le \frac{\|A\|^n}{n!} \Rightarrow \text{la serie } \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{A^n}{n!}\right\| < +\infty$$

perché è maggiorata termine a termine da

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\text{Esiste}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \text{ ; la chiamo } e^A \text{ !!}$$

(4) Se A e B commutano $AB = BA \Rightarrow$

$$\boxed{e^A e^B = e^{A+B} \quad \text{se } AB = BA}$$

<u>INFATTI</u> $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}\right) =$ (prodotto alla Cauchy)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{A^m}{m!} \frac{B^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} A^m B^{n-m}$$

$$\underset{\text{(binomio di Newton)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = e^{A+B}$$

VALE se $\boxed{AB = BA}$ $\quad (A+B)(A+B)\dots(A+B) \Rightarrow$ (sviluppo tutti i prodotti)

trovo dei termini $\underbrace{A\,A\,B\,A\,B\,A\,A\,B\,B}_{n \text{ termini}} = A^m B^{n-m}$

MI SERVE $AB = BA$

(5) Si considera $W(t) = e^{tA}$ ($\forall t$ $W(t)$ è una matrice)

$$\Rightarrow \boxed{W'(t) = A\,W(t)}$$

In effetti la definizione di $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$

è una serie di potenze in t (a valori nelle matrici)

Se ci fidiamo dei teoremi sulle serie di potenze $\Rightarrow$

· raggio di conv. è $+\infty$

· W è derivabile $W' =$ serie delle derivate $\Longrightarrow$

$$W'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, t^{n-1}}{n!} A^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A\, A^{n-1} =$$

$$A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} = (\text{cambio di indice}) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = A\, W(t)$$

$\Rightarrow$ · POSSO DIMOSTRARE LA FORMULA $\frac{d}{dt}\left(e^{tA} Y_0\right) = A e^{tA} Y_0$

BASTA USARE $\frac{d}{dt} e^{tA} = e^{tA}$ e moltiplico per Y_0 a destra

INFINE NOTO CHE $e^{0\cdot A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} A^n$ (rimane solo il termine n=0)

$= Id$ (la matrice identica)

$$\Rightarrow \quad e^{tA} Y_0 \Big|_{t=0} = Id \cdot Y_0 = Y_0$$

$\boxed{\text{VALE } (\ast\ast)}$ perché $W(t) = e^{tA} Y_0$ risolve l'equazione e la condizione iniziale $\Rightarrow$ per l'unicità $W(t)$ è l'unica sol. di (P.L.O)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la sol. di (P.L.O), se } t_0 = 0\text{, è data da} \\ Y(t) = e^{tA} Y_0\end{array}}$$

(se no $Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0$)

OSS. Se $N=1$ (caso dell'equazione $y' = a y$) $\Rightarrow$ la sol. è $y(t) = e^{at} y_0$

IL PROBLEMA DIVENTA QUELLO DI CALCOLARE e^A, data una matrice A

ANDIAMO DAI CASI SEMPLICI AL CASO GENERALE

① Se $A = M A_1 M^{-1}$ dove M è invertibile $\Rightarrow$

$$e^A = M e^{A_1} M^{-1}$$

Dim. $$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{(M A_1 M^{-1})^n} = M \left(\sum \frac{1}{n!} A_1^n \right) M^{-1}$$

$$\underbrace{(M A_1 \cancel{M^{-1}})(\cancel{M} A_1 \cancel{M^{-1}}) \cdots (\cancel{M} A_1 \cancel{M^{-1}})(\cancel{M} A_1 M^{-1})}_{n} = M A_1^n M^{-1}$$

$\simeq$ la formula che dà l'esponenziale è la stessa se cambio base

② Se D è una matrice diagonale: $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1 .. \lambda_N) =$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix} \Rightarrow e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_N} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^D = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_N}) =$$

Dim. Basta osservare che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$D^n = \mathrm{Diag}(\lambda_1^n \cdots \lambda_N^n) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{Diag}(\lambda_1^n, \cdots, \lambda_N^n) = \mathrm{Diag}\left(\sum_{n=0} \frac{\lambda_1^n}{n!}, \cdots, \sum_{n=0} \frac{\lambda_N^n}{n!} \right)$$

Per esempio $$e^{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix}.$$