Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 66 17/05/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

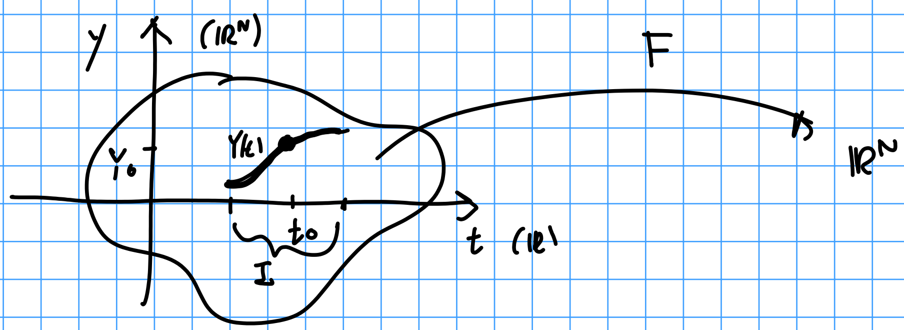
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

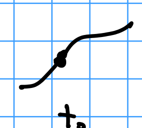
SISTEMI DI EQ. DIFF. LINEARI

CASO GENERALE (non lineare)

POSIZIONE DEL PROBLEMA

Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ (N variabili "spaziali" e 1 var. temporale)





$F : \Omega \to \mathbb{R}^N$. $\quad (Y_0, t_0) \in \Omega \quad (Y_0 \in \mathbb{R}^N, \ t_0 \in \mathbb{R})$

Ci interessa risolvere il "problema di Cauchy" (pb. ai dati iniziali)

$$(P) \qquad \begin{cases} Y' = F(Y, t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Risolvere (P) significa trovare: (a) un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ APERTO che contiene t_0, (b) una funzione $Y : I \to \mathbb{R}^N$ tale che (b.1) Y è C^1 su I

(b.2) se $t \in I \Rightarrow (Y(t), t) \in \Omega$ ←

(b.3) se $t \in I$ $\quad Y'(t) = F(Y(t), t)$

Dunque trovare una soluzione prevede trovare sia $Y(t)$ sia l'intervallo I in cui vive t.

Il fatto che $N \geq 1$ significa che $Y(t) = (y_1(t) \cdots y_N(t))$ è un vettore a N componenti dunque (P) è un sistema di N eq. diff.

$$(P) \begin{cases} y_1' = F_1(y_1 \dots y_N, t) & , \; y_1(t_0) = y_{0,1} \\ \vdots & \vdots \\ y_N' = F_N(y_1 \cdots y_N, t) & , \; y_N(t_0) = y_{0,N} \end{cases}$$

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ DI CAUCHY Se F è

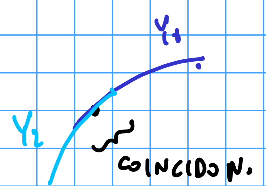
$$(Lip.) \begin{cases} \text{Lipschitziana in } Y \text{ uniformemente rispetto a } t \text{, cioè} \\ \exists L : \quad \| F(Y_1, t) - F(Y_2, t) \|_{\mathbb{R}^N} \leq L \| Y_1 - Y_2 \|_{\mathbb{R}^N} \\ \qquad \forall (Y_1, t), (Y_2, t) \in \Omega \end{cases}$$

(c) F è continua rispetto a (Y, t)

Allora (1) $\exists$ una soluzione di (P) (nel senso detto sopra)

(2) Se $Y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^N$ e $Y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^N$ sono due soluzioni di (P) $\Rightarrow$ $Y_1(t) = Y_2(t)$ $\forall t \in I_1 \cap I_2 (=: I)$

(1) ← ESISTENZA (2) ← UNICITÀ

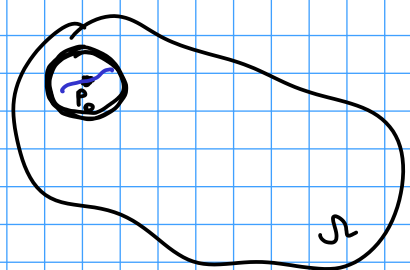


QUESTO TEOREMA DI SOLITO SI ESPRIME DICENDO che (P) ha "localmente" un'unica soluzione – NON POSSO PREVEDERE per quanto tempo esiste la soluzione $Y(t)$ (cioè quanto è grande l'intervallo I su cui Y è definita)

OSS. L'ipotesi su F può essere "indebolita" chiedendo che F sia localmente lip. in y unif. rispetto a t cioè

$\forall P_0 \in \Omega \ \exists R>0$ tale che $\overline{B(P_0, R)} \subset \Omega$ e

$F : B(P_0,R) \to \mathbb{R}^N$ è lip sch. in y unif. risp. a t



· UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER AVERE (Lip.) è che esistono $\frac{\partial F}{\partial y_i}(y, t)$ $(i=1 .. N)$ e sono continue nella coppia (y,t)

(NON MI SERVE LA DERIVATA IN t)

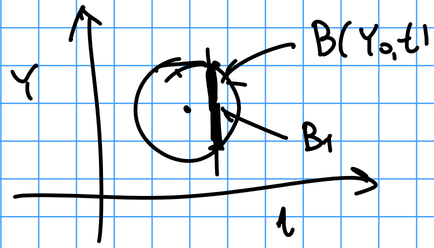
INFATTI IN QUESTO CASO, se mi restringo a $B((Y_0,t_0),R) \subset \Omega$ USO TAYLOR (nella var. $Y \in B_1$, t fissato) CON RESTO DI LAGRANGE:

$$F(Y_2,t) - F(Y_1,t) = J_F(Y_\xi,t)(Y_2-Y_1)$$

dove Y_ξ è un punto sul segmento tra Y_1 e Y_2

(SI PUÒ FARE PERCHÉ $B((Y_0,t_0))$ è convesso $\Rightarrow$ Fissato t

$B_1 = \{ Y : (Y,t) \in B(Y_0,t) \}$ è una palla in Y



$\Longrightarrow$

$$\|F(Y_2,t)-F(Y_1,t)\| \le \underbrace{\|J_F(Y_2,t)\|}_{\text{LIMITATA IN } \overline{B}(Y_0,t_0)} \|Y_2-Y_1\| \le L\,\|Y_2-Y_1\|$$

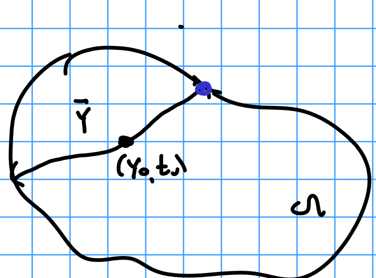
DATO

$\forall\, (Y_2,t),\ (Y_1,t) \in \overline{B}((Y_0,t_0),R)$. #

SE $\boxed{F,\ \dfrac{\partial F}{\partial y_i}}$ esistono continue in (Y,t) $\Longrightarrow$ il teorema vale !!

TEOREMA (di esistenza massimale). Supponiamo che valgono le ipotesi scritte sopra ((Lip) e (C)). Allora esistono un intervallo aperto $\bar I$ tale che $\bar I \ni t_0$ e una soluzione $\bar Y : \bar I \to \mathbb{R}^N$ t.c. $\bar Y$ è "massimale" (e $\bar I$ è "l'intervallo massimale" di esistenza) CIOÈ

NON ESISTE NESSUN INTERVALLO J (non necessariamente aperto) tale che $J \supset \bar I$ $J \neq \bar I$ su cui si possa estendere $\bar Y$. In altri termini non esiste J con J intervallo $\bar I \subset J$ $\bar I \neq J$ e $Y : J \to \mathbb{R}^N$ Y sol. di (P).



· INOLTRE SI PRESENTA UNO DI QUESTI TRE CASI (per $t > t_0$ — analogo discorso per $t < t_0$)

Se scrivo $\bar I =]\underline{t}, \bar t[$ $\qquad -\infty \le \underline{t} < t_0 < \bar t \le +\infty$

TEMPO MASS. SX $\quad$ TEMPO MASSIMALE DESTRO

(I) $\bar t = +\infty$

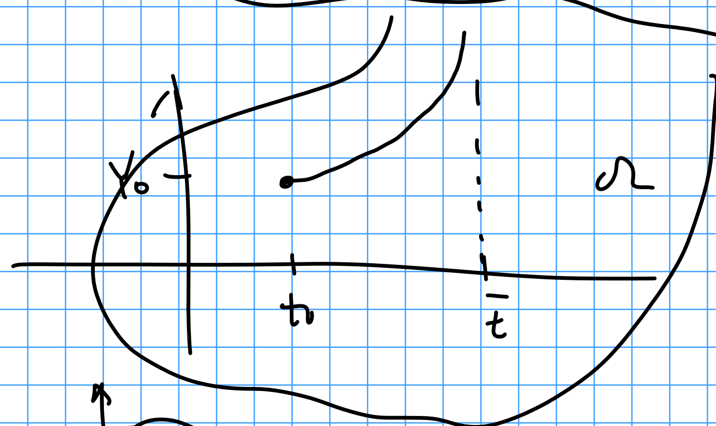
(II) $\bar t < +\infty$, $\lim_{t \to \bar t^-} \|\bar Y(t)\| = +\infty$

(III) $\bar{t} < \infty$, $\lim_{t \to \bar{t}} \text{dist}\left((\bar{Y}(t), t), \partial\Omega \right) = 0$

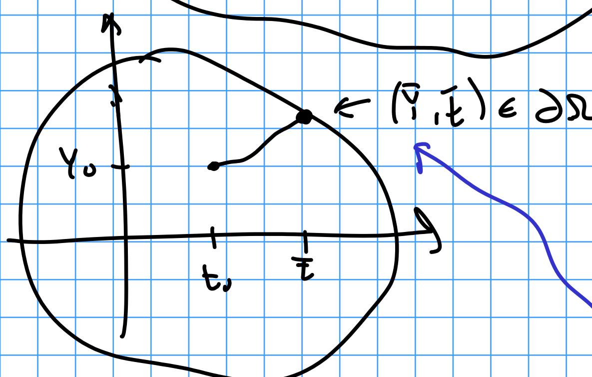
(Stesse alternative per $\underline{t}$)

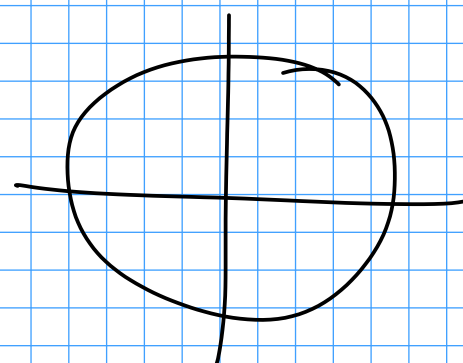
(I)

(II)



(III)





In ipotesi un po' più forti (nel caso (III)) si può dire che $\exists\, \bar{Y}$ tale che

$$\lim_{t \to \bar{t}} \bar{Y}(t) = \bar{Y} \quad \text{e} \quad (\bar{Y}, \bar{t}) \in \partial\Omega$$

OVVIAMENTE La sol. massimale è unica (segue da quanto dopo...)

OSS. La cosa importante nel teorema è la forma $Y' = F(Y, t)$

Si potrebbe considerare più in generale un problema del tipo

$G(Y', Y, t) = 0$ ← NON CI SONO RISULTATI COSÌ SEMPLICI

IL CASO DI CAUCHY CORRISPONDE A DIRE $G(P,Y,t) = P - F(Y,t)$ E IL PROBLEMA È "IN FORMA NORMALE"

Per es. l'eq. $t y' + y^2 = t$ NON È IN FORMA NORMALE ← $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

↓

$$y' = -\frac{y^2}{t} + 1 \qquad \text{(cambia } \Omega \text{ !!)}$$

QUELLO CHE FAREMO È CONSIDERARE IL CASO LINEARE

$$Y' = AY + B(t)$$

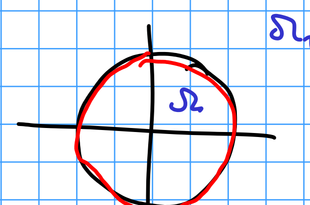
(qui ci sono proprietà più forti).

VEDIAMO UN ESEMPIO DEL "CASO GENERALE" per vedere come si può usare il teorema di Cauchy

ESEMPIO (E) $$y' = \frac{y}{\underbrace{x^2+y^2-1}_{F(x,y)}}$$ (ho usato x in luogo di t ...)

IN QUESTO CASO $N = 1$ $\quad F : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^2 \supset \Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1 \}$$



CONVIENE PENSARE CHE $\boxed{\Omega = \{ (x,y) : x^2 + y^2 < 1 \}}$

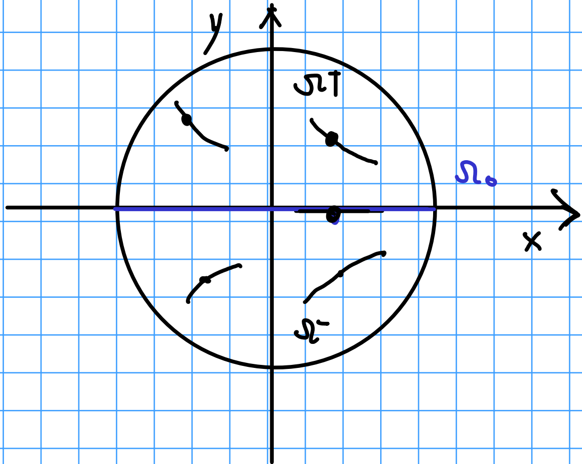
(si può analogamente prendere $\Omega_1 = \{ x^2 + y^2 > 1 \}$)

$$F(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2-1}$$

si vede: F è C^1 su Ω (sia in x che in y)

⇒ VALE il teorema di Cauchy (di esistenza e unicità locale)

⇒ Per ogni $P_0 = (x_0, y_0)$ esiste unica una sol y di (E), definita vicino a x_0, tale che $y(x_0) = y_0$.



Nota : $F(x,y) > 0$ se $(x,y) \in \Omega$ $y < 0$

$F(x,y) < 0$ se $(x,y) \in \Omega$ $y > 0$

$F(x,y) = 0$ se $(x,y \in \Omega$, $y = 0$

$\Rightarrow$ Se $(x_0, y_0) \in \Omega^+ = \{ \cdots \; y > 0$

la sol y è decrescente, vicino a x_0

Se $(x_0, y_0) \in \Omega^- = \{ \cdots \; y < 0 \}$

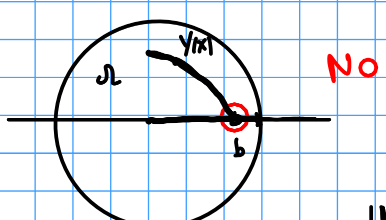
la sol y è "localmente" crescente

Se $(x_0, y_0) = \Omega_0 = \{ \cdots \; y = 0 \}$

$\Rightarrow$ sol y è "localmente" costante

· <u>Nota</u> Se $(x_0, y_0) \in \Omega^+ / \Omega^- / \Omega_0 \Rightarrow y(t) \in \Omega^+ / \Omega^- / \Omega_0$ se x è vicino a x_0 (chiaro per Ω^+ e Ω^-, dato che Ω^+ e Ω^- sono aperti e $y(t)$ è continua). Per Ω_0 è un po' più complicato, ma è intuitivo che $y(t)$ non può uscire da Ω^0 "se è costante" (in effetti posso dire che $y_1(t) = 0$ è una soluzione che parte da $y_0 = 0 \Rightarrow$ per l'unicità $y(t) = y_1(t)$ $\forall t$..)

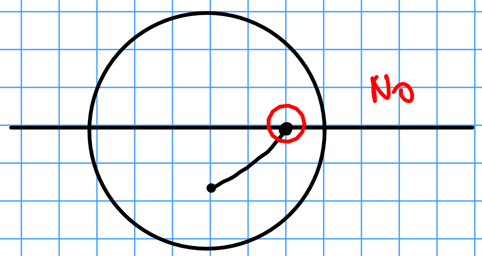
· <u>Nota</u> Se $y(x)$ risolve (E) $y(x) \in \Omega^+$ per $x \in]a, b[$ con $b < 1$ ed esiste $y(b) \Rightarrow y(b) \in \Omega^+$. IN ALTRI TERMINI se $y(t)$ esiste per $x \in [a, b]$ e $y(t) > 0$ per $x \in [a, b[\;\Rightarrow y(b) > 0$



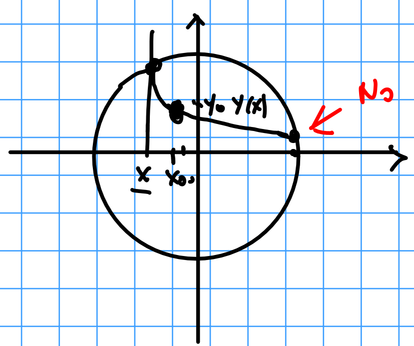
INFATTI SE $y(b) = 0$ TROVEREI DUE SOLUZIONI DISTINTE CHE "ESCONO ALL'INDIETRO" DA $(b, 0)$. UNA È $y(x)$ L'ALTRA È LA COSTANTE $y_1(x) = 0$

<u>DUNQUE</u> le soluzioni che partono da $(x_0, y_0) \in \Omega^+$, fino quando esistono (in Ω) RIMANGONO IN Ω^+

STESSO DISCORSO IN Ω^-



NOI SAPPIAMO CHE per ogni (x_0, y_0) esiste la soluzione massimale $\bar{Y} :]\underline{x}, \bar{x}[\to \mathbb{R}$ ($\bar{x}$ e $\underline{x}$ dipendono da (x_0, y_0))



- SUPPONIAMO $(x_0, y_0) \in \Omega^+$ e sia $\bar{Y}$ la sol. massimale. Sicuramente $(\bar{Y}(x), x) \in \Omega^+$ $\forall x \in]\underline{x}, \bar{x}[$ per quanto detto sopra $\Rightarrow$ $\bar{Y}(x)$ è decrescente in x (dato che $Y' < 0$) $\Rightarrow$

$\exists\ \underline{y} := \lim_{x \to \underline{x}} y(x)$ $\quad \exists\ \bar{y} := \lim_{x \to \bar{x}} y(x)$. Necessariamente

$(\underline{x}, \underline{y}) \in \bar{\Omega}^+$ $\quad (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\Omega}^+$ $\Rightarrow$

$\underline{x}^2 + \underline{y}^2 = 1$ $\quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$

- se faccio il limite in (E) per $x \to \underline{x}$ dove

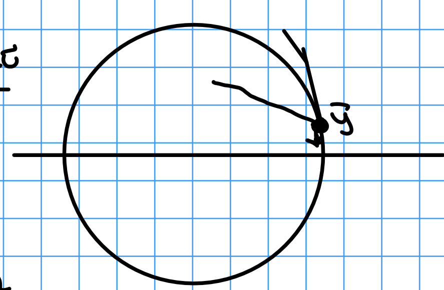
$$\lim_{x \to \underline{x}^-} y'(x) = \lim_{x \to \underline{x}} \frac{y(x)}{x^2 + y(x)^2 - 1} = \frac{\underline{y}}{0^-} = -\infty \quad \text{perché } \underline{y} > y_0 > 0$$

$(-1 < \underline{x} < x_0)$

- Se faccio lo stesso caso per $x \to \bar{x}^+$ potrei avere $\bar{y} > 0$ o $\bar{y} = 0$

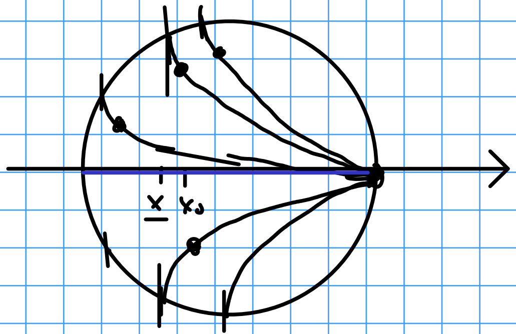
Se fosse $\bar{y} > 0$ con lo stesso calcolo di prima $\Rightarrow$

$\lim_{x \to \bar{x}} y'(x) = -\infty$ IMPOSSIBILE



Perché se fosse "$y'(\bar{x}) = -\infty$", andando all'indietro $y(x)$ sarebbe fuori da Ω

L'UNICA POSSIBILITÀ È $\boxed{\bar{y} = 0}$



$$\Rightarrow \quad \bar{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 1^-} y(x) = 0$$

ANALOGAMENTE se parto da $y_0 < 0$ ho $\underline{x} \in]-1, x_0[$ e $y'(x) \to +\infty$ se $x \to \underline{x}$ mentre $\bar{x} = 1$ e $\lim_{x \to 1^-} y(x) = 0$

INOLTRE SE $y_0 = 0 \Rightarrow y(x) = 0$ per $-1 < x < 1$

<u>PROBLEMA</u> $\lim_{x \to 1} y'(x) = ??$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{y(x)}{(x^2 + y(x)^2 - 1)} \qquad \left(\text{è della forma } \frac{0}{0}\right)$$

Provo de l'Hôpital

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{y'(x)}{2x + 2y'(x)y(x)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{y(x)}{x^2 + y(x)^2 - 1}}{2x + \frac{2y^2(x)}{x^2 + y(x)^2 - 1}} =$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{y(x)}{2x(x^2 + y(x)^2 - 1) + 2y^2(x)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2\frac{x}{y(x)}(x^2 + y^2 - 1) + 2y}$$

??

COMPLICATO

ALTRO TENTATIVO DA

$$y' = \frac{y}{x^2 + y^2 - 1} \quad \Rightarrow$$

$$y'' = \frac{(x^2 + y^2 - 1) - 2y^2}{(\quad)^2} = \frac{x^2 - y^2 - 1}{(\quad)^2}$$

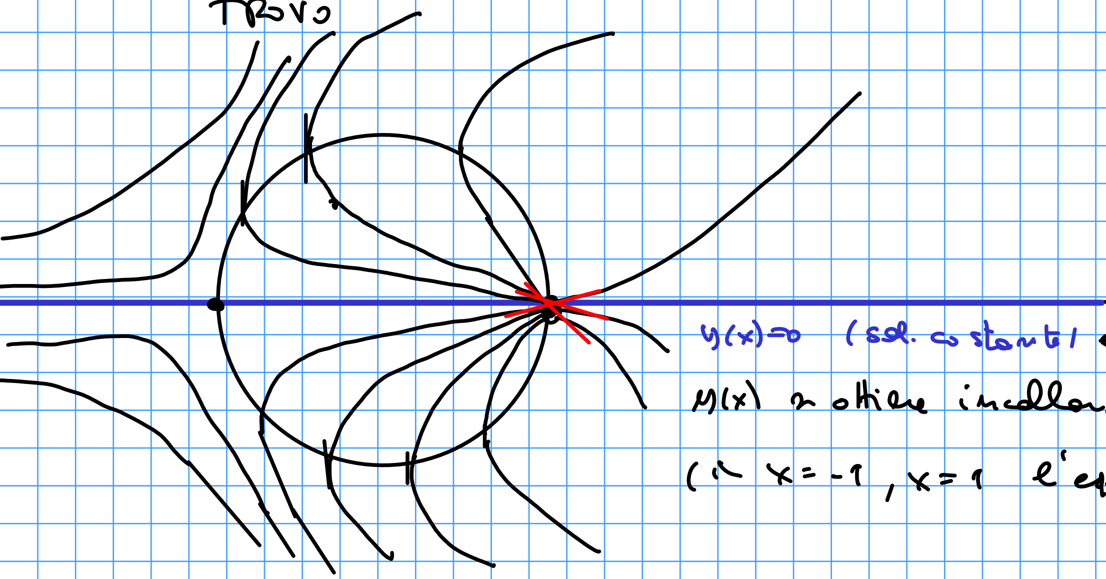
$$y'' > 0 \iff x^2 - y^2 > -1 \iff y^2 < x^2 + 1$$

PER ORA NON È CHIARO COSA SUCCEDE DI $y'(x)$

QUANDO $x \to$

<u>OSS.</u> Se faccio discorsi analoghi su $\Omega_+ = \{ x^2+y^2 > 1 \}$

TROVO



$y(x)=0$ (sol. costante) ← nel senso che $y(x)$ si ottiene incollando tre pezzi costanti (in $x=-1$, $x=1$ l'eq. perde senso)

Se $\lim_{x\to 1^-} y(x) = \ell \neq 0 \Rightarrow$ posso incollare $y(x)$ con un'analoga $y(x)$ definita $x>1$ tale che $\lim_{x\to 1^+} y(x) = \ell$

<u>NON LO SO!</u>