Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 65 12/05/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

STOKES $(S, \hat{\nu})$ sup. orientata, $\vec{f}$ campo su S

$$\Rightarrow \quad \Phi(\operatorname{rot}\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \int_{\underbrace{\partial(S)\hat{\nu}}} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

verso di $\partial(S)$ deve essere coerente con $\hat{\nu}$

ESEMPIO Sia:

$$\vec{F} := (yz + y^3z - z^3)\vec{i} + (xz - x^3z - e^{yz})\vec{j} + xy\,\vec{k}$$

(1) calcoliamo $\vec{f} = \operatorname{rot}\vec{F}$

$$\vec{f} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & D_x & yz + y^3z - z^3 \\ \vec{j} & D_y & xz - x^3z - e^{yz} \\ \vec{k} & D_z & xy \end{bmatrix} =$$

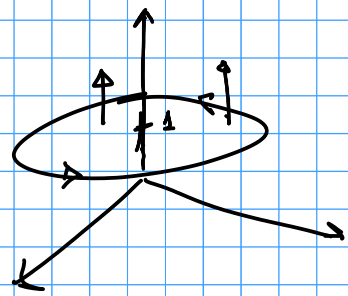
$$\vec{i}\left(\cancel{x} - (\cancel{x} - x^3 - y e^{yz})\right) - \vec{j}\left(\cancel{y} - (\cancel{y} + y^3 - 3z^2)\right) +$$

$$+\vec{k}\left(\cancel{z} - 3x^2z - (\cancel{z} + 3y^2z)\right) =$$

$$(x^3 + y e^{yz})\vec{i} + (y^3 - 3z^2)\vec{j} - 3(x^2+y^2)z\,\vec{k} = \vec{f}$$

(b) Calcolare $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}$ dove

$\gamma(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j} + \vec{k}$ (USANDO STOKES)



NOTA: γ descrive il bordo di S dove

$S = \{\, x^2+y^2 \le 1,\quad z = 1 \,\}$

e il verso di γ è coerente con $\hat{\nu} = \vec{k}$

$$\Rightarrow \oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_S \left(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{\nu}\right) d\sigma = \iint_S \left(\vec{g}\cdot\vec{k}\right) d\sigma =$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} g_3(x,y,1)\,dx\,dy = -3\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\cdot 1\,dx\,dy =$$

$$-3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2\cdot\rho\,d\rho = -3\cdot 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{6}{4}\pi = -\frac{3}{2}\pi$$

(c) Calcolare $\iint_{\partial Q} \vec{F}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$ (*) dove $Q = \{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}$

($\hat{\nu}$ è la normale uscente da Q)

conviene usare il teorema della divergenza

$$\vec{F} := (yz + y^3 z - z^3)\,\vec{i} + (xz - x^3 z - e^{yz})\,\vec{j} + xy\,\vec{k} \Rightarrow$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 0 + -ze^{yz} + 0 = -ze^{yz}$$

$$(*) = \iiint_Q -ze^{yz}\,dx\,dy\,dz = -\int_0^1 dx\int_0^1 dz\int_0^1 ze^{yz}\,dy =$$

$$= -\int_0^1 \left[e^{yz}\right]_{y=0}^{y=1} dz = -\int_0^1 (e^z - 1)\,dz =$$

$$-\left[e^z - z\right]_0^1 = -(e - 1 - 1 + 0) = 2 - e$$

(d) $\vec{f}$ è conservativo?? Dato che $\vec{f}$ è definito su $\mathbb{R}^3$ (che semplicemente connesso) basta vedere se $\vec{f}$ è irrotazionale

$$(x^3 + y e^{yz})\vec{i} + (y^3 - 3z^2)\vec{j} - 3(x^2+y^2)z\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y e^{yz}) = e^{yz} + zy e^{yz}$$

$$\neq$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^3 - 3z^2) = 0$$

NON È IRROTAZIONALE

$\Downarrow$ (qui non occorre che $\mathbb{R}^3$ è S.C.)

NON È CONSERVATIVO.

DEF. Dato $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ($\vec{f}$ continuo)

dico che $\vec{f}$ è SOLENOIDALE se esiste

$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ (di classe C^1) tale che

$$\text{rot}\,\vec{F} = \vec{f}$$

QUESTO $\vec{F}$ (se esiste) si chiama <u>POTENZIALE VETTORE</u> per $\vec{f}$.

<u>FATTI</u> ① Se $\vec{f}$ è solenoidale $\Rightarrow$ div $\vec{f} = 0$

NON È DIFFICILE VEDERE che, dato un campo $\vec{F}$, $\Rightarrow$

$$\text{div}(\text{rot}\,\vec{F}) = 0 \quad \left(\nabla \cdot (\nabla \otimes \vec{F}) = \vec{F} \cdot \underbrace{(\nabla \otimes \nabla)}_{=0} \right)$$

② Se $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ha divergenza nulla e Ω è stellato $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è solenoidale

(NON SI DIMOSTRA)

si potrebbe dim che l'implicazione "div $\vec{f} = 0 \Rightarrow \vec{f}$ SOLENOIDALE" vale quando Ω verifica la seguente proprietà:

"Per ogni superficie $S \subset \Omega$, con $\partial(S) = \emptyset \Rightarrow$ S si può deformare, in Ω, a un punto"

Per esempio in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ questo non vale

---

ESEMPIO (di costruzione di un potenziale vettore)

Prendiamo $\vec{f} = 2xyz(\vec{i} + \vec{j}) - (x+y)z^2 \vec{k}$

Vediamo se $\vec{f}$ è solenoidale; se sì troviamo un pot. vettore.

Dato che $\vec{f}$ è def. su $\mathbb{R}^3$ (stellato!), allora

$$\vec{f} \text{ solenoidale} \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{f} = 0$$

MA $\operatorname{div} \vec{f} = 2yz + 2xz - (x+y)2z = 0$. SOLENOIDALE

Come trovo $\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}$ t.c. $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{f}$?!

Provo a cercare $\vec{F}$ con $F_3 = 0$. $\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j}$

Calcolo $\operatorname{rot} \vec{F} = \det \begin{bmatrix} i & D_x & F_1 \\ j & D_y & F_2 \\ k & D_z & 0 \end{bmatrix} =$

$$i(-D_z F_2) - \vec{j}(-D_z F_1) + \vec{k}(D_x F_2 - D_y F_1)$$

se impongo $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{f}$ ottengo

(1) $D_z F_2 = -f_1 = -2yz$ $\quad 2xyz$

(2) $D_z F_1 = f_2 = 2xz$ $\quad 2xyz$

(3) $D_x F_2 - D_y F_1 = f_3 = -(x+y)z^2$

(1) $\Rightarrow$ $F_2 = -2\int xyz \, dz = -xy z^2 + c(x,y)$

(2) $\Rightarrow$ $F_1 = 2\int xyz \, dz = xy \cdot z^2 + d(x,y)$

IMPONIAMO ③ : $-yz^2 + c_x(x,y) - xz^2 - d_y(x,y) = -(x+y)z^2$

dunque $c_x - d_y = 0$

(ho tanta libertà ...) per esempio $c = d = 0$ o anche

$c(x,y) = c(y)$ $d(x,y) = d(x)$ $\Longrightarrow$ TROVO

$F_1 = xz^2 + d(x)$ $F_2 = -yz^2 + c(y)$

$$\vec{F} = \left(xz^2 + d(x)\right)\vec{i} - \left(yz^2 + c(x)\right)\vec{j}$$

OSS. Supponiamo $\vec{F}$ e $\vec{G}$ entrambi pot. vettori per $\vec{f}$ $\Rightarrow$

$$\mathrm{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{f} = \mathrm{rot}\left(\vec{G}\right) \Longrightarrow \mathrm{rot}\,(\underbrace{\vec{F} - \vec{G}}_{\vec{h}}) = 0$$

QUANDO vale $\mathrm{rot}\,(\vec{h}) = 0$??

RISPOSTA (se Ω è semp. connesso) $\vec{h} = \nabla H$ H scalare

Se Ω è s.c., $\vec{F}$ è pot. vettore per $\vec{f}$, ALLORA

$\vec{F}_1$ è pot vett. per $\vec{f}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{F}_1 = \vec{F} + \nabla G$

con G scalare

#