Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 64   11/05/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$$D = \{ 4 \geq x^2+y^2 \geq 1+z^2 \}$$

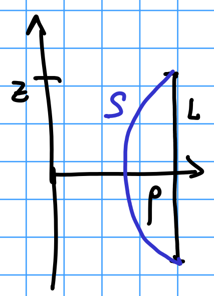
$$\vec{f}(x,y,z) = 3xyz^2\left(y\vec{i} - x\vec{j}\right) + 2z^3x^2\vec{k}$$

Calcolare i flussi $\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu})$ e $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})$ dove

L e S sono $L = \{ x^2+y^2 = 4,\ z^2 \leq 3 \} = \{ x^2+y^2 = 4,\ -\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3} \}$

$S = \{ x^2+y^2 = 1+z^2,\ z^2 \leq 3 \}$

$\partial D = L \cup S$



Tutto ruotato intorno all'asse z

$\hat{\nu}$ = normale uscente da D

La cosa più semplice è $\Phi_{TOT} = \Phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu}) = \Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) + \Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})$

perché in questo caso posso usare il teorema della div.

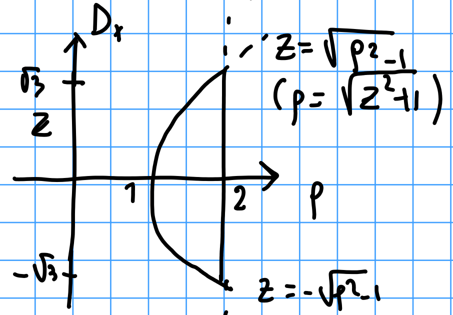
$$\Phi_{TOT} = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{f})\,dx\,dy\,dz = \iiint_D \Big(\underbrace{3y^2z^2}_{\partial/\partial x\, f_1} - \underbrace{3x^2z^2}_{\partial/\partial y\, f_2} + \underbrace{6z^2x^2}_{\partial/\partial z\, f_3} \Big)\,dx\,dy\,dz$$

$$\left(3xyz^2\left(y\vec{i}-x\vec{j}\right)+2z^3x^2\vec{k}\right)=\iiint_D 3z^2\left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz$$

coordinate cilindriche $\quad z=z \quad x=\rho\cos\theta \quad y=\rho\sin\theta$

$$\iiint_{D_1} 3z^2(\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz \qquad \text{dove } D_1=\left\{(\rho,\theta,z):\ \begin{array}{l}4\ge\rho^2\ge 1+z^2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{array}\right\}$$

$$=2\pi\iint_{\tilde{D}_1} 3z\,\rho^3\,d\rho\,dz \;= \qquad \tilde{D}_1=\left\{(\rho,z):\ 4\ge\rho^2\ge 1+z^2\right\}$$



$$2\pi\nearrow\int_1^2\left(\int_{-\sqrt{\rho^2-1}}^{\sqrt{\rho^2-1}} 3z^2\rho^3\,dz\right)d\rho \;=\!=\; \longrightarrow$$

$$2\pi\searrow\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\int_{\sqrt{z^2+1}}^{2} 3z^2\rho^3\,d\rho\right)dz$$

$$\longrightarrow 2\pi\,3\int_1^2\rho^3\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\sqrt{\rho^2-1}}^{\sqrt{\rho^2-1}}d\rho=2\pi\int_1^2\underbrace{\rho^3\;2\,(\rho^2-1)^{3/2}}_{\rho\;\rho^2(\rho^2-1)}d\rho= \qquad s=\rho^2$$

$$2\pi\int_1^4 s\,(s-1)^{3/2}\,ds=2\pi\int_1^4\left((s-1)^{5/2}+(s-1)^{3/2}\right)ds=$$

$$-1+1$$

$$2\pi\left[\frac{2}{7}(s-1)^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{5}(s-1)^{5/2}\right]_1^4=$$

$$2\pi\;2\left(\frac{1}{7}\,3^{7/2}+\frac{1}{5}\,3^{5/2}\right)=\frac{2}{35}\left(5\cdot 27\sqrt{3}+7\cdot 9\sqrt{3}\right)=$$

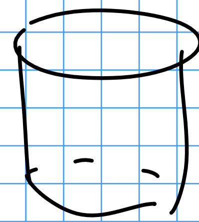
$$2\pi\,\frac{2}{35}\left(135+63\right)\sqrt{3}=\frac{792}{35}\sqrt{3}\,\pi$$

Ho CALCOLATO $\Phi\left(\vec{f},\,S\cup L,\,\hat{\nu}\right)$

Se guardo bene mi accorgo che $\vec{f}\perp\hat{\nu}$ su L

su L $\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{1}{2}(x, y, 0)$ $\perp$ perpendicolari

$\vec{g} = \lambda(x,y,z)\,(-y, x, \text{qualcosa})$



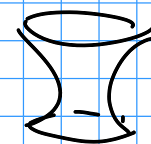
$$\Rightarrow \quad \Phi(\vec{g}, L, \hat{\nu}) = 0 \quad !!!$$

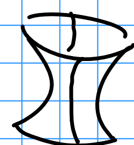
$$\Rightarrow \quad \Phi(\vec{g}, S, \hat{\nu}) = \frac{792}{35}\sqrt{3}\,\pi$$

Vediamo un abbozzo di verifica... (USO LA DEF. DI FLUSSO)

$\iint_S \vec{g}\cdot\hat{\nu} = ??$ Devo parametrizzare S. In realtà

NON $\exists$ $\Gamma : R \to \mathbb{R}^3$ che descrive S



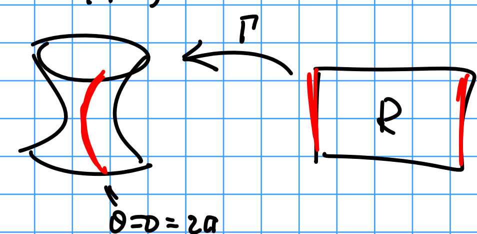
(MI SERVONO DUE "TOPPE" )

Però se uso le "coordinate cilindriche"

$$\Gamma(\theta, z) = \left(\sqrt{z^2+1}\cos\theta,\ \sqrt{z^2+1}\sin\theta,\ z\right)$$

$$\left\{ 0 \le \theta \le 2\pi \quad -\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3} \right\} \leftarrow R \qquad \Gamma(R) = S$$

Γ non è iniettivo ma la "saldatura" non conta nell'integrale (MISURA dei $\{\theta, z\}$ cattivi è nulla in $\mathbb{R}^2$)



$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} = -\sqrt{z^2+1}\sin\theta\,\vec{i} + \sqrt{z^2+1}\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\cos\theta\,\vec{i} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\sin\theta\,\vec{j} + \vec{k}$$

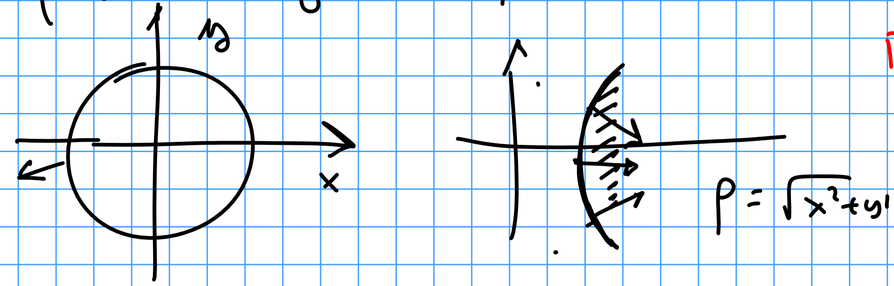
$$\vec{N}_\Gamma = \frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} \otimes \frac{\partial\Gamma}{\partial z} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & -\sqrt{z^2+1}\sin\theta & \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\cos\theta \\ \vec{j} & \sqrt{z^2+1}\cos\theta & \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\sin\theta \\ \vec{k} & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{i}\left(\sqrt{z^2+1}\cos\theta\right) - \vec{j}\left(-\sqrt{z^2+1}\sin\theta\right) + \vec{k}\left(-z\cos^2\theta - z\sin^2\theta\right) =$$

$$\sqrt{z^2+1}\left(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta\right) - z\vec{k} \leftarrow$$

PUNTA VERSO L'INTERNO DI D

Γ è "discorde" da $\hat{j}$



$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{j}) = -\Phi(\vec{f}, \Gamma)$$

$$= -\iint_R \vec{f}(\Gamma(\theta, z)) \cdot N_\Gamma(\theta, z)\, d\theta\, dz =$$

$$-\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz \Big\{ 3\sqrt{z^2+1}\cos\theta\sqrt{z^2+1}\sin\theta\, z^2 \Big(\underbrace{3\sqrt{z^2+1}\sin\theta\,\vec{i} - 3\sqrt{z^2+1}\cos\theta\,\vec{j}}_{\text{Perpendicola.}}\Big)$$

$$+ 2z^3\left(\sqrt{z^2+1}\cos\theta\right)^2\vec{k}\Big) \cdot \Big(\sqrt{z^2+1}\,\underbrace{\left(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta\right)} - z\vec{k}\Big)\Big\}$$

RIMANE SOLO LA COMPONENTE Z

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2z^3(z^2+1)\cos^2\theta\,(-z)\,dz = \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\theta}_{=\pi} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \underbrace{2z^4(z^2+1)}_{2z^6+2z^4}dz$$

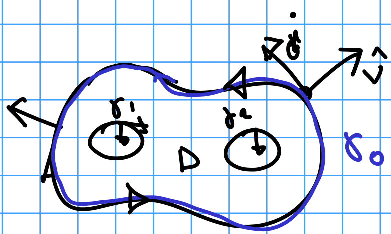
$$= \pi\left[\frac{2}{7}z^7 + \frac{2}{5}z^5\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 4\pi\left(\frac{27}{7} + \frac{9}{5}\right) = \ldots$$

DOVREBBE TORNARE

VERSIONE BIDIMENSIONALE DEL T. DIV.

RICORDO. $D \subset \mathbb{R}^2$ DOMINIO REG. A TRATTI $\Rightarrow$

∂D = UNIONE DI CURVE CHIUSE REG A TRATTI $\gamma_0 \; \gamma_1 \dots \gamma_k$



Se $\hat{\nu}$ è la normale uscente da D nei pti di ∂D $\Rightarrow$ c'è un verso per $\partial \gamma$ nel senso che posso scegliere queste curve in modo coerente con ∂D

TEOR. Se $D \subset \mathbb{R}^2$ reg. a tratti e $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$

Ω aperto $D \subset \Omega$, $\vec{f}$ è $C^1(\Omega)$ allora

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{f} \, dxdy = \iint \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial \Omega} \left(\vec{f} \cdot \hat{\nu} \right) ds$$

$$=: \sum_{i=0}^{k} \int_{\gamma_i} \left(\vec{f} \cdot \hat{\nu} \right) ds$$ dove $\gamma_0 \dots \gamma_i$ descrivono ∂D

INT. DI I° SPECIE - NON CONTA IL VERSO DELLE γ_i

(per ogni i $\quad \int_{\gamma_i} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, ds = \int_a^b \vec{f}(\gamma_i(t)) \cdot \hat{\nu}(\gamma_i(t)) \, \|\gamma_i'(t)\| dt$
$\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R}^2$)

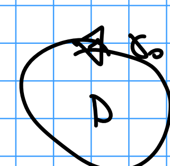
(NON LO DIMOSTRO - SIMILE AL CASO TRIDIM.)

$\Rightarrow$

TEOREMA (FORMULA DI GAUSS-GREEN)

Nelle stesse ipotesi di sopra, suppongo che le γ_i abbiano verso coerente con ∂D

$$\iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy = \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\int_{\gamma_i} \vec{f} \cdot d\vec{s}}_{\text{int. di II specie}}$$



- CONTA IL VERSO DELLE γ_i -

(NEGLI INT. CURVILINEI INTEGRO LA COMPONENTE TANGENTE)

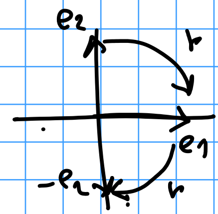
IDEA DI DIM.

CONSIDERO LA Rotazione $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$r(x,y) = (y,-x) \qquad r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r\,\hat{e}_2 = r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_1$$

$$r\,\hat{e}_1 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\hat{e}_2$$



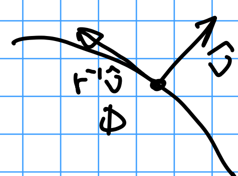
r ruota di 90° in senso orario

(r ruota di -90°)

Data $\vec{f} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j}$ applico il teor della div. a

$$\vec{g} := r\vec{f} = f_2\vec{i} - f_1\vec{j} \Rightarrow$$

$$\iint_D \operatorname{div}\vec{g}\,dx\,dy = \iint_{\partial D} (\vec{g}\cdot\hat{\nu})\,ds$$



$$= \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \iint_{\partial D} (r\vec{f}\cdot\hat{\nu})\,ds$$

$$= \iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\Big(\underbrace{r^{-1}\hat{\nu}}_{\hat{\nu}\text{ ruotato di }90^\circ\text{ in senso antiorario}}\Big)\,ds$$

$$\hat{\nu}\text{ ruotato di }90^\circ\text{ in senso antiorario} = \frac{\dot{\gamma}_i}{\|\dot{\gamma}_i\|} \leftarrow \text{PERCHÉ } \gamma \text{ è coerente con } \partial D$$

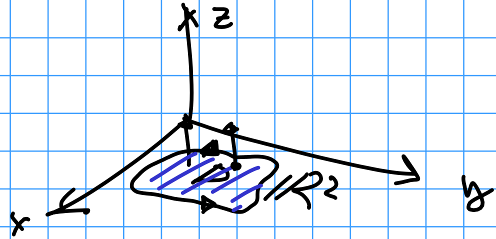
$$= \int_{\partial D} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

DUNQUE VALE LA FORMULA

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D_{\hat{\nu}}} \vec{f}\cdot d\vec{s}}$$

Percorso col verso coerente con $\hat{\nu}$

Se "immergo" $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$



posso leggere la formula di Gauss-Green nel seguente modo:

$$\iint_D \left(\text{rot}\,\vec{f}\cdot\hat{\nu}\right)d\sigma = \int_{\Sigma(D)} \vec{f}\,d\vec{s}$$

dove sto vedendo D come superficie dentro $\mathbb{R}^3$

(la posso parametrizzare con $\Gamma(u,v) = (u,v,0) \Rightarrow$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{i} \quad \frac{\partial\Gamma}{\partial v} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{j} \quad \vec{N}_p = \vec{k}$$

e decido che $\int_{\Sigma(D)} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \sum_{i=0} \int_{\gamma_i} \vec{f}\cdot d\vec{s}$

∂D in $\mathbb{R}^2$ diventa $\Sigma(D) = \{(u,v,0) : (u,v)\in\mathbb{R}\})$

si vede che il verso coerente di ∂D in $\mathbb{R}^2$ diventa il verso coerente di $\Sigma(D)$ in $\mathbb{R}^3$

DOVE rot $\vec{f}$ = rotore di $f_1\cdot\vec{i} + f_2\,\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$

$\Rightarrow$ rotore $= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}$

QUESTA FORMULA SI GENERALIZZA A UNA SUPERFICIE ORIENTATA QUALUNQUE

TEOREMA DI STOKES

Sia $(S,\hat{\nu})$ superficie (reg. a tratti) orientata (in $\mathbb{R}^3$)

Allora $\Sigma(S)$ si descrive con un numero finito di curve chiuse $\gamma_0 \dots \gamma_k$ percorse con verso coerente con $\hat{\nu}$.

Se $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ Ω aperto $S \subset \Omega$, è un campo C^1

allora è definito il rotore di $\vec{f}$:

$$\text{rot}\,\vec{f} = \vec{\nabla} \otimes \vec{f} = \det \begin{bmatrix} i & D_x & f_1 \\ j & D_y & f_2 \\ k & D_z & f_3 \end{bmatrix} = \dots$$

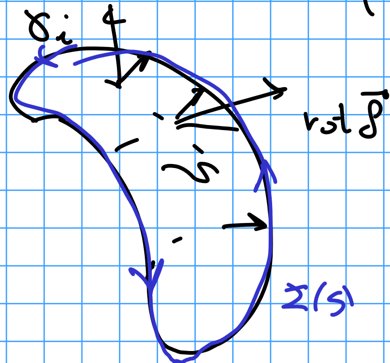
(coincide con $\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}$ se $f_3 = 0$ e f_1 f_2 non dipendono da z)

$\Rightarrow$ VALE LA FORMULA DI STOKES:

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_S (\vec{f} \cdot \hat{\nu})\, d\sigma = \int_{\Sigma(S)\,\hat{\nu}} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

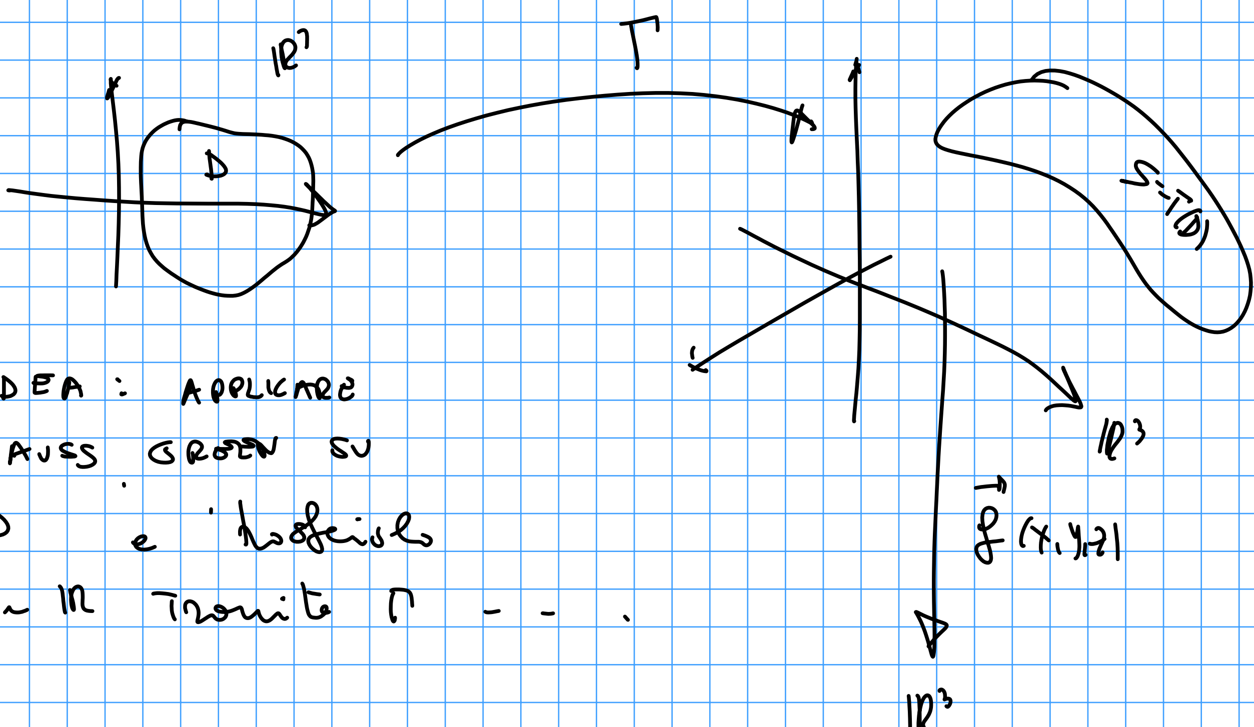
$$=: \sum_{i=0}^{k} \int_{\gamma_i} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

(con le γ_i che descrivono $\Sigma(S)$ in modo coerente con $\hat{\nu}$)



È CRUCIALE CAPIRE COME VANNO ORIENTATI IL FLUSSO ATTRAVERSO S E LA "CIRCUITAZIONE" SU $\Sigma(S)$

NON FACCIO LA DIM. IDEA: se S è parametrica



IDEA: APPLICARE GAUSS GREEN SU D e trasferirlo in $\mathbb{R}$ tramite Γ - - .