Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 63 10/05/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Flusso di un campo vettoriale $\vec{f}$ attraverso una $(S, \hat{\nu})$ superficie orientata.

- Se S è parametrizzata da un $\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ (coerente con $\hat{\nu}$)

$$\boxed{\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_D \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \vec{N}_\Gamma(u,v)\, du\, dv}$$

- Nel caso generale ho che S si decompone in $S_1 \dots S_n$, su ognuna delle quali $\hat{\nu}$ è un'orientazione per $S_1 \dots S_n$. Allora

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) := \sum_{i=1}^{n} \Phi(\vec{f}, S_i, \hat{\nu})$$

<u>oss.</u>

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_S \left(\vec{f} \cdot \hat{\nu}\right) d\sigma$$

Vediamo che l'eguaglianza vale nel caso parametrico

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) \overset{(\text{def})}{=} \iint_D \vec{f}(\Phi(u,v)) \cdot N_\Gamma(u,v)\, du\, dv =$$

$$\iint_D \left(\vec{f}(\Phi(u,v)) \cdot \frac{\vec{N}_\Gamma(u,v)}{\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|}\right) \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|\, du\, dv =$$

$$\iint_D \left(\vec{f}(\phi(u,v)) \cdot \hat{\nu}(\phi(u,v)) \right) \|\vec{N}_P(u,v)\| \, du\, dv \underset{(\text{def.})}{=}$$

$$\iint_D \left(\vec{f} \cdot \hat{\nu} \right) d\sigma$$

__ESEMPIO__ Se S è il grafico di una funzione $g : D \to \mathbb{R}$

$$S = \Gamma(u,v) \qquad (u,v) \in D$$

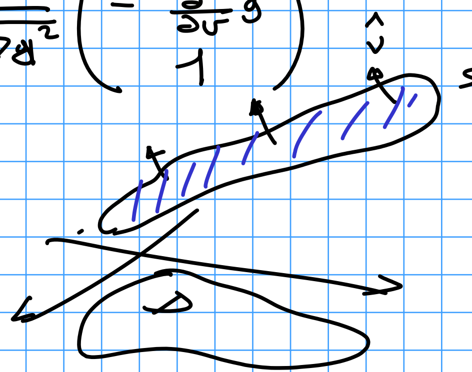
$$\Gamma(u,v) = (u, v, g(u,v))$$

Allora $\vec{N}_\Gamma(u,v) = \begin{pmatrix} -D_u g \\ -D_v g \\ 1 \end{pmatrix}$

Posso assegnare

$$\hat{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial u} g \\ -\frac{\partial}{\partial v} g \\ 1 \end{pmatrix}$$

PUNTA VERSO L'ALTO : $\hat{\nu} \cdot \vec{k} > 0$



$S = G_g$ (grafico di g)

Allora se $\vec{f} = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k}$

$\Rightarrow$

$$\Phi(\vec{f}, G_g, \hat{\nu}) = \iint_D \vec{f}(u,v,g(u,v)) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial u} \vec{i} - \frac{\partial g}{\partial v} \vec{j} + \vec{k} \right) du\, dv =$$

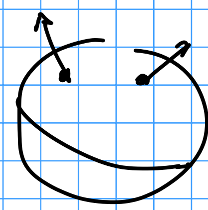
$$-\iint_D f_1(u,v,g(u,v)) \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\, du\, dv - \iint_D f_2(u,v,g(u,v)) \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\, du\, dv$$
$$+ \iint_D f_3(u,v,g(u,v))\, du\, dv$$

$$\Rightarrow \Phi(f \cdot \vec{k}, G_g, \hat{\nu}) = \iint_D f(u,v,g(u,v))\, du\, dv$$

f scalare $\vec{f} = f \cdot \vec{k}$ parallelo all'asse z (qui $f_1 = f_2 \Rightarrow f_3 = f$)

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

(D chiuso) $D \subset \mathbb{R}^3$ dominio regolare e limitato ($\Rightarrow$ ∂D è una superficie regolare e limitata, e ∂D si <u>può orientare</u> mediante la normale $\hat{\nu}$ <u>USCENTE</u> da D)



$\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 dove Ω è un aperto con $D \subset \Omega$

CHIAMO DIVERGENZA DI $\vec{f}$ l'espressione

$$\operatorname{div}(\vec{f}) \left(= \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \right) = \boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}}$$

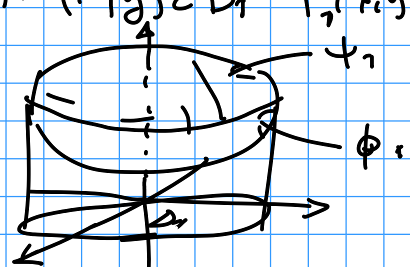
$$\boxed{\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}}$$

ALLORA

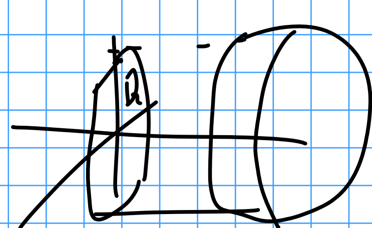
$$\left(\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \right) \iint_S \left(\vec{f} \cdot \hat{\nu} \right) d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{f}) \, dx\,dy\,dz$$

<u>DIM.</u> Lo dimostro nel caso particolare in cui il dominio è normale rispetto a tutti gli assi:

(rispetto a z): $D = \{ (x,y,z) : (x,y) \in D_1 \ \ \phi_1(x,y) \le z \le \psi_1(x,y) \}$



(rispetto a y): $D = \{ (x,y,z) : (x,z) \in D_2 \ , \ \phi_2(x,z) \le y \le \psi_2(x,z) \}$



(rispetto a x): $D = \{ (x,y,z) : (y,z) \in D_3 \ , \ \phi_3(y,z) \le x \le \psi_3(y,z) \}$

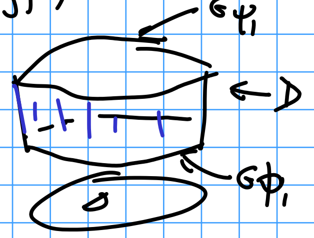
Per esempio $D =$ palla o il cubo

Lo dimostro in questo caso. Abbiamo $\vec{f} = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k}$

Calcoliamo $\displaystyle\iint_{\partial D} (f_3 \vec{k}) \cdot \hat{\nu} \, d\sigma$

Se vedo D come normale all'asse z,

$$D = \{ (x,y,z) : (x,y) \in D_1 \;\; \phi_1(x,y) \le z \le \Psi_1(x,y) \}$$



si vede facilmente che

$$\partial D = \{ (x,y,z) : (x,y) \in D_1 ,\; z = \phi_1(x,y) \} \cup$$
$$\{ (x,y,z) : (x,y) \in D_1 ,\; z = \Psi_1(x,y) \} \cup$$
$$\{ (x,y,z) : (x,y) \in \partial D_1 \;\; \phi_1(x,y) \le z \le \Psi_1(x,y) \}$$

$\operatorname{div}(f_3 \cdot \vec{k}) = \dfrac{\partial f_3}{\partial z}$. INTEGRIAMO $\operatorname{div}(f_3 \vec{k})$ su D

(uso la forma di D)

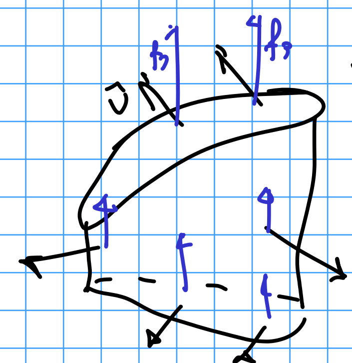
$$\iiint_D \frac{\partial f_3}{\partial z} \, dx\,dy\,dz =$$

$$\iint_{D_1} \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\Psi_1(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) \, dz \right) dx\,dy = \iint_{D_1} \Big(f_3(x,y,\Psi_1(x,y)) - f_3(x,y,\phi_1(x,y)) \Big) dx\,dy$$

$$= \iint_{D_1} f_3(x,y,\Psi_1(x,y)) \, dx\,dy - \iint_{D_1} f_3(x,y,\phi_1(x,y)) \, dx\,dy$$

$$= \Phi(f_3 \vec{k}, G_{\Psi_1}, \hat{\nu}) + \Phi(f_3 k, G_{\phi_1}, \hat{\nu}) =$$

($\hat{\nu}$ è quello iniziale, uscente da D, dunque su G_{ϕ_1} è opposto a quello che viene definito dalla formula $\begin{pmatrix} -D_x g \\ -D_y g \\ 1 \end{pmatrix}$)



$$= \Phi(f_3 \vec{k}, \partial D, \hat{\nu})$$ perché sul "pezzo verticale"

$\{ (x,y) \in \partial D_1 \quad \varphi_1 \le z \le \psi_1 \}$ la $\hat\nu$ è perpendicolare a $\vec{k}$. DUNQUE

$$\iiint_D \operatorname{div}(f_3 \vec{k})\,dx\,dy\,dz = \Phi(f_3 \vec{k}, \partial D, \hat\nu)$$

Se calcolo $\displaystyle\iiint_D \overbrace{\operatorname{div}(f_2 \vec{j})}^{=\frac{\partial f_2}{\partial y}}\,dx\,dy\,dz$ trovo

$$\Phi(f_2 \vec{j}, \partial D, \hat\nu)$$

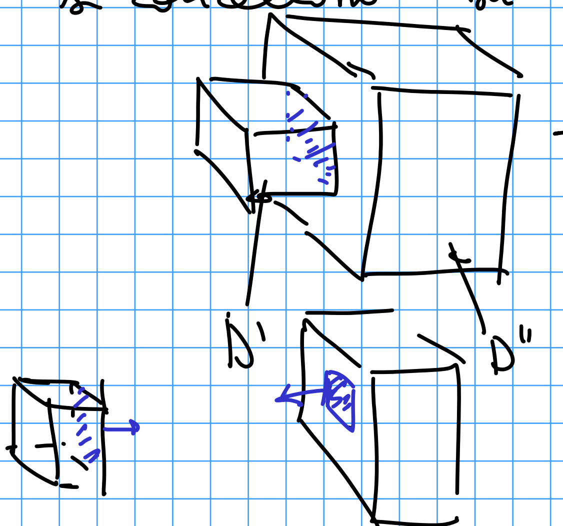
usando la decomposizione rispetto a y; se calcolo

$\displaystyle\iiint_D \operatorname{div}(f_1 \vec{i})\,dx\,dy\,dz$ trovo $\Phi(f_1 \vec{i}, \partial D, \hat\nu)$

SOMMO I TRE PEZZI $\Rightarrow$

$$\iiint_D \operatorname{div}(\vec{f})\,dx\,dy\,dz = \Phi(\vec{f}, \partial D, \hat\nu) \qquad \#$$

<u>OSS.</u> Se $D = D' \cup D''$, $D' \cap D'' \subset \partial D' \cap \partial D''$, D' e D'' che verificano le ipotesi della dim. $\Rightarrow$ il teorema vale su D perché i flussi si cancellano su $D' \cap D''$. <u>DISEGNO</u>:



$\leftarrow D$

div $\vec{f}$ calcolo

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{f} = \iiint_{D'} \operatorname{div} \vec{f} + \iiint_{D''} \operatorname{div} \vec{f}$$

$$\overset{''}{=} \Phi(\vec{f}, \partial D', \hat\nu) + \Phi(\vec{f}, \partial D'', \hat\nu)$$

$$\overset{''??}{=} \Phi(\vec{f}, D, \hat\nu)$$

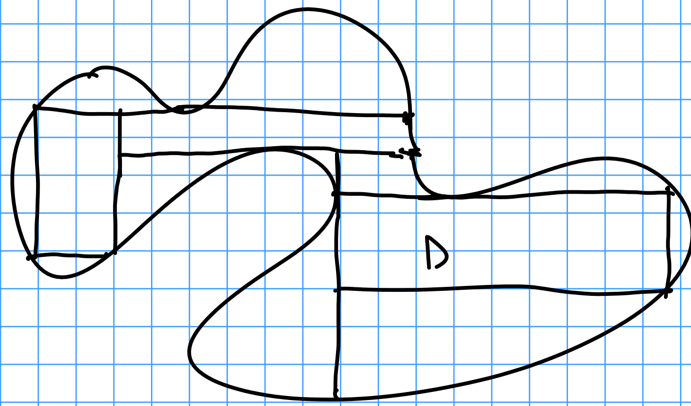
?!

SÌ

perché i flussi sulla parte blu si cancellano

QUESTA OSS. MOSTRA COME SI PUÒ DIM. IL CASO GENERALE.

Dato un D generi. Lo posso suddividere in una unione finita di D_i che verificano le ipotesi della di.



ESEMPIO

$$D = \{(x,y,z) : -1 \le z \le -x^2 - y^2\}$$

$$\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

VOGLIO CALCOLARE $\Phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu})$

dove $\hat{\nu}$ è la normale uscente da D.

Facciamo prima il calcolo senza usare il teorema della div.

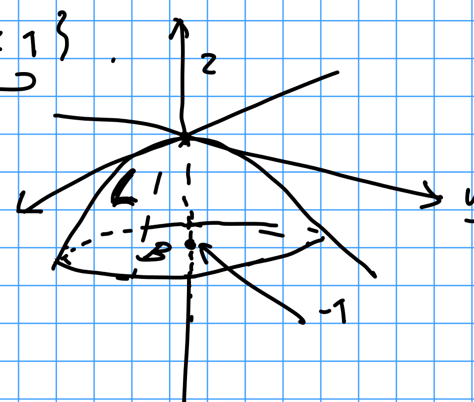
CHI È ∂D ?!

$$D = \{G_1(x,y,z) \le 0,\ G_2(x,y,z) \le 0\} \quad \text{dove}$$

$$G_1(x,y,z) = -z-1 \qquad G_2(x,y,z) = z + x^2 + y^2$$

$$\partial D = \{G_1 = 0,\ G_2 \le 0\} \cup \{G_1 \le 0,\ G_2 = 0\} =$$

$$\underbrace{\{z = -1,\ x^2+y^2 \le 1\}}_{B} \cup \underbrace{\{x^2+y^2 = -z \le 1\}}_{L}.$$



su B $\hat{\nu} = \dfrac{\nabla G_1}{\|\nabla G_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -k$

su L $\hat{\nu} = \dfrac{\nabla G_2}{\|\nabla G_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$

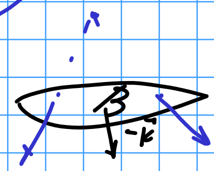
$\Phi(\vec{f}, B, -\vec{k}) =$ devo "parametrizzare" B. B è il grafico di $g(u,v) = -1$ su $u^2+v^2 \le 1$ $\Longrightarrow$ $\boxed{r(u,v) = (u,v,-1)}$

$$N_\Gamma = \begin{pmatrix} -D_u\, 0 \\ -D_v\, 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{opposto a } \hat{\nu}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{f}, D, -\vec{k}) = -\iint_{u^2+v^2\le 1} f(u,v,-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} du\,dv$$

$$\iint_{u^2+v^2\le 1} \vec{f}(u,v,-1) = -\iint_{u^2+v^2\le 1} \left(u\vec{i} + v\vec{j} + (-1)\vec{k}\right)\cdot\vec{k} =$$

$$-\iint_{u^2+v^2\le 1} \vec{f}(\Gamma(u,v))\cdot N_\Gamma(u,v)\, du\,dv$$



$$+\iint_{u^2+v^2\le 1} du\,dv = \pi$$

$\vec{f}\cdot -\vec{k} =$
$z\cdot\vec{k}\cdot(-\vec{k})$
ma $z=-1$
($\Rightarrow$ viene 1)

(in questo caso S è piatto e $\hat{\nu}$ è costante)

- Facciamo $\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu})$

uso la parametrizzazione $\Gamma(u,v) = (u, v, g(u,v))$

dove ora $g(u,v) = -u^2 - v^2 \Rightarrow N_\Gamma = \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}$ che è

concorde con $\hat{\nu}$ $\Rightarrow$

$$\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) = \iint_{\{u^2+v^2\le 1\}} \underbrace{\vec{f}(u,v,-u^2-v^2)}_{u\vec{i}+v\vec{j}-(u^2+v^2)\vec{k}}\cdot\left(2u\vec{i}+2v\vec{j}+\vec{k}\right)du\,dv =$$

$$\iint_{\{u^2+v^2\le 1\}} \left(2u^2+2v^2-u^2-v^2\right)du\,dv =$$

$$\iint_{\{u^2+v^2\le 1\}} \left(u^2+v^2\right)du\,dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2\rho\, d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu}) = \frac{3}{2}\pi$$

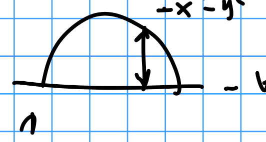
PROVIAMO A FARE IL CALCOLO USANDO LA DIVERGENZA.

$\vec{g} = (x, y, z) \Rightarrow \operatorname{div} \vec{g} = 1 + 1 + 1 = 3$

$\Rightarrow \iiint_D \operatorname{div} \vec{g}\, dx\,dy\,dz = 3\,|D| = 3 \iiint_D 1\, dx\,dy\,dz =$

$D = \{ x^2 + y^2 \le 1 \quad -1 \le z \le -x^2 - y^2 \}$

$= 3 \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left(\int_{-1}^{-x^2-y^2} 1\, dz \right) dx\,dy$



$3 \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left(-x^2 - y^2 - (-1) \right) dx\,dy =$

$3 \iint_{x^2+y^2 \le 1} (1 - x^2 - y^2)\, dx\,dy = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-\rho^2)\rho\, d\rho =$

$6\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = 6\pi \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{3\pi}{2}$ TORNA !!

$\boxed{\text{COMPITINO} \longrightarrow \text{4 GIUGNO}}$

ESEMPIO $\quad D = \{ 4 \ge x^2 + y^2 \ge 1 + z^2 \}$

D è regolare a tratti: $D = \{ G_1 \le 0,\ G_2 \le 0 \}$ dove

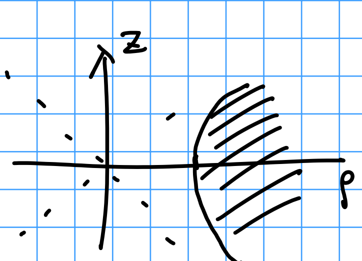
$G_1 = x^2 + y^2 - 4 \qquad G_2 = 1 + z^2 - y^2 - x^2$

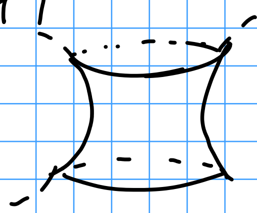
$D = D_1 \cap D_2$ dove $D_1 = \{ G_1 \le 0 \}$ = cilindro di raggio 2

$\partial D_1 = \{ x^2 + y^2 = 4 \}$

D_2 è ottenuto ruotando $\{ \rho^2 \ge 1 + z^2 \} =$

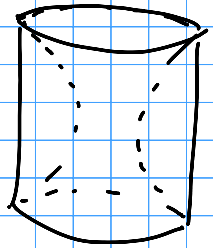
$\{ \rho^2 - z^2 \ge 1 \}$



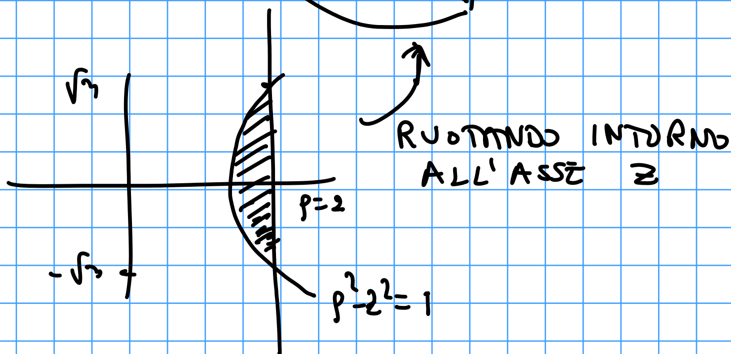


(ESTERNO)

D →



IN D LA COORDINATA z VARIA TRA $-\sqrt{3}$ e $+\sqrt{3}$



$$\boxed{\partial D = \underbrace{\{\, x^2+y^2=4,\ -\sqrt{3}\le z\le \sqrt{3}\,\}}_{L} \cup \underbrace{\{\, x^2+y^2=1+z^2,\ -\sqrt{3}\le z\le\sqrt{3}\,\}}_{S}}$$

$G_1=0 \quad G_2\le 0$

$G_1=0 \iff x^2+y^2=4$

$G_2\le 0 \iff z^2+1\le x^2+y^2=4 \iff z^2\le 3$

$G_1\le 0 \quad G_2=0$

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2=1+z^2 \\ x^2+y^2\le 4\end{matrix}\right\} \Rightarrow z^2\le 3$$

NORMALI UNITARIE USCENTI

• SU L

$$\hat{\nu} = \frac{\nabla G_1}{\|\nabla G_1\|} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2}}\begin{pmatrix}2x\\2y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ 0\end{pmatrix} =$$

se $(x,y,z)\in L$ $\quad \boxed{\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{x}{2}\vec{i} + \frac{y}{2}\vec{j}}$

• SU S

$$\hat{\nu} = \frac{\nabla G_2}{\|\nabla G_2\|} = \begin{pmatrix}-2x\\-2y\\2z\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} \to$$

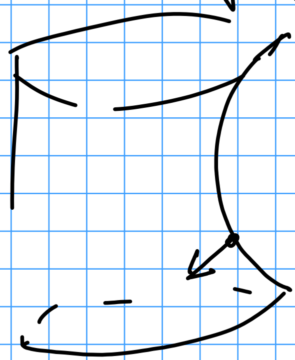
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(-x\vec{i}-y\vec{j}+z\vec{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2+z^2}}\left(-x\vec{i}-y\vec{j}+z\vec{k}\right)$$

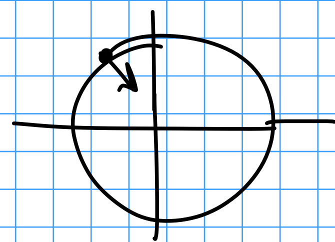
per esempio se $P=(x,y,z)=(1,-1,-1)$ quanto fa $\hat{\nu}(P)$

$P \in S$?? $\quad x^2+y^2 = 1+1 \quad\quad 1+z^2 = 1+1$ TORNA

$P \notin L \quad x^2+y^2 = 2 < 4$

$$\hat{\nu}(P) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-1, 1, -1\right) = -\frac{\vec{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{3}} - \frac{\vec{k}}{\sqrt{3}}$$





- CALCOLARE I FLUSSI

$$\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) \quad e \quad \Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})$$

dove $\vec{f}(x,y,z) = 3xyz^2\underbrace{\left(y\vec{i} - x\vec{j}\right)}_{\text{è perpendicolare a } x\vec{i}+y\vec{j}} + 2z^3x^2\vec{k}$

SUGG. $\quad \vec{f} \perp \hat{\nu}_L = 0$??