Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

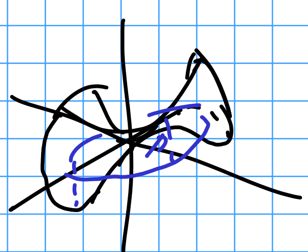
Lezione 61 04/05/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ESERCIZI $S = \{ z = x^2 - y^2 , \quad x^2+y^2 \leq 1 \}$

S è il grafico di $g(x,y) = x^2 - y^2$ su $\underline{B = \{x^2+y^2 \leq 1\}}$



$\Gamma(u,v) = (u, v, g(u,v))$

$\vec{N}_\Gamma = \begin{pmatrix} -D_u g \\ -D_v g \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{N}_\Gamma\| = \sqrt{1+|\nabla g|^2}$

$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$

Area di S $= \iint_B \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\,dy =$ coord. polari

$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho = \pi \int_0^1 \sqrt{1+4s}\, ds$

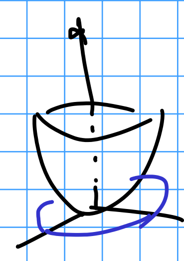
$s = \rho^2 \quad ds = 2\rho\, d\rho$

$= \pi \int_0^1 (1+4s)^{1/2}\, ds \qquad \pi \left[\frac{1}{4}\frac{2}{3}(1+4s)^{3/2} \right]_0^1 =$

$\frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1 \right) = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

<u>NOTA</u> Si ottiene lo stesso risultato se si calcola

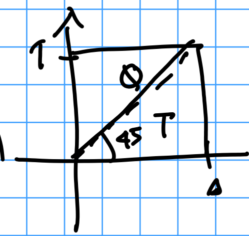
Area $\left(\{ z = x^2+y^2 \quad x^2+y^2 \leq 1 \} \right)$



VEDIAMO INVECE $S_1 = \{ z = x^2 + y^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \}$

$$\Rightarrow \text{Area}(S_1) = \iint_Q \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy =$$

$Q = \{ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \}$

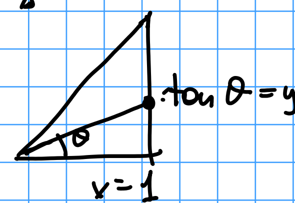


$T = \{(x,y) \in Q,\ x \ge y\}$

$$= 2 \iint_T \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy = (\text{coord. pol.})$$

(per simmetria)

$$2 \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho = \left(\begin{matrix} \rho^2 = s \\ 2\rho\,d\rho = ds \end{matrix} \right)$$



$$\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{1+\tan^2\theta} \sqrt{1+4s}\,ds =$$

$$\int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{4}\frac{2}{3}(1+4s)^{3/2} \right]_0^{1+\tan^2\theta} d\theta = \frac{1}{6}\int_0^{\pi/4} \left((5+4\tan^2\theta)^{3/2} - 1 \right) d\theta =$$

$$t = \tan\theta \qquad \theta = \arctan t \qquad d\theta = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(5+4t^2)^{3/2}}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(5+4t^2)}{1+t^2}\sqrt{5+4t^2}\,dt$$

(SI PUÒ RICONDURRE A UNA FUNZ. RAZIONALE ...
È COMPLICATO - LASCIAMO STARE)

VOGLIO DEFINIRE IL FLUSSO DI UN CAMPO $\vec{f}$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

CASO SEMPLICE $\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ sia una superficie parametrica
(tutte le varie ipotesi su Γ ...)

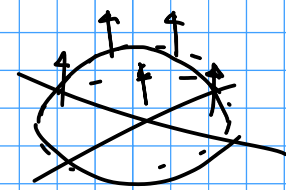
Supponiamo che $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ sia un campo continuo e che $(S=)\ \Gamma(D) \subset \Omega$.

Allora definisco il flusso "di $\vec{f}$ su Γ"

$$\Phi(\vec f, \Gamma) = \iint_\Gamma \vec f \cdot d\sigma := \iint_D \vec f(\Gamma(u,v)) \cdot \vec N_\Gamma(u,v)\,du\,dv$$

<u>Esempio</u> $\Gamma(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$ $\qquad \vec f(x,y,z) = \vec k$

($\vec f$ è costante) $\qquad (u,v) \in B = \{x^2+y^2 \le 1\}$

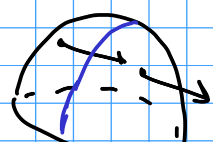


$$\boxed{\vec N_\Gamma(u,v) = \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec i + \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec j + \vec k}$$

$$\Phi(\vec f, \Gamma) = \iint_B \vec k \cdot \vec N_\Gamma(u,v)\,du\,dv = \iint_B 1\,du\,dv = \pi$$

Se avessi fatto $\Phi(\vec j, \Gamma) =$

$$\iint_B \vec j \cdot \vec N_\Gamma(u,v)\,du\,dv = \iint_B \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\,du\,dv = 0$$



$$\left(\iint_{B\cap\{v\ge 0\}} \frac{v}{\sqrt{\ }}\,du\,dv + \iint_{B\cap\{v\le 0\}} \frac{v}{\sqrt{\ }}\,du\,dv \right)$$

"opposti"

per sicurezza facciamo il calcolo completo (in coord. polari)

$$u = \rho\cos\theta \qquad v = \rho\sin\theta$$

$$\text{INT} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho\sin\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\rho\,d\rho = \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta\right)}_{=0} \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho$$

• Se INVECE CALCOLO $\Phi(\vec j, \Gamma^+)$

dove $\Gamma^+ = \Gamma$ ristretto a $B^+ = \{u^2+v^2 \le 1,\ v \ge 0\}$

$\Rightarrow$

$$\Phi(\vec j, \Gamma^+) = \iint_{B^+} \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\,du\,dv = \int_0^\pi \sin\theta \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho =$$

$$2\int_0^1\left(-\sqrt{1-\rho^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)d\rho = -2\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho + 2\arcsin\rho\,\Big|_0^1$$

$$= -2\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho + \pi = -\frac{\pi}{2}+\pi = \frac{\pi}{2}$$

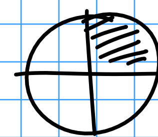
VEDI SOTTO

$$\frac{-2\rho}{2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = \int_0^1\frac{1-\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho = \int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}+\rho\,\frac{d}{d\rho}\sqrt{1-\rho^2}\right)d\rho =$$

$$= \arcsin\rho\,\Big|_0^1 + \underbrace{\left[\rho\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho \Longrightarrow$$

$$2\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = \frac{\pi}{4}$$



Ho DEFINITO IL FLUSSO di $\vec{f}$ su Γ

$\Downarrow$

POSSO DEFINIRE $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})$ se $(S,\hat{\nu})$ è una superficie parametrizzata orientata.

DEF Data $(S,\hat{\nu})$ orientata SCELGO Γ che parametrizza S in modo che $\frac{\vec{N}_\Gamma}{\|N_\Gamma\|} = \hat{\nu}$

e definisco $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \Phi(\vec{f}, \Gamma)$

Se cambio $\hat{\nu}$ in $-\hat{\nu}$ il flusso cambia di segno.

RIPETIAMO GLI ESEMPI PRECEDENTI DA QUESTO PUNTO DI VISTA

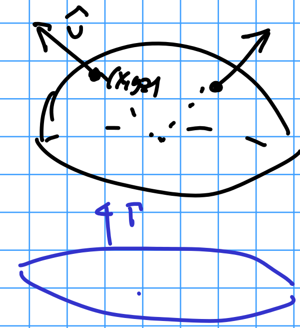
ESEMPIO $S = \{x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\}$

$S^+ = \{x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0, y\geq 0\}$

$\vec{f}(x,y,z) = \vec{k}$ $\qquad \vec{f}_1(x,y,z) = \vec{j}$

Per definire i flussi ho bisogno di introdurre l'orientazione su S definendo $\hat{\nu}$. Per esempio posso considerare su S (e dunque su S^+)

$$\hat{\nu}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



$\Rightarrow$ $(S,\hat{\nu})$ e $(S^+,\hat{\nu})$ sono due superfici (parametrizzate)

Per calcolare $\Phi(\vec{f}_1, S, \hat{\nu})$ devo prendere una parametrizzazione Γ e controllare se $\boxed{\dfrac{\vec{N}_\Gamma(u,v)}{\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|} = \hat{\nu}(\Gamma(u,v))}$

Se prendo la Γ della sopra $\Gamma(u,v)$ $(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$

$$\Rightarrow \quad \vec{N}_\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{\ }} \\ \frac{v}{\sqrt{\ }} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{N}_\Gamma\|^2 = \frac{u^2}{1-u^2-v^2} + \frac{v^2}{1-u^2-v^2} + 1$$

$$= \frac{1}{1-u^2-v^2}$$

$$\frac{\vec{N}_\Gamma}{\|\vec{N}_\Gamma\|}(u,v) = \sqrt{1-u^2-v^2}\begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{\ }} \\ \frac{v}{\sqrt{\ }} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{bmatrix} = \underbrace{\Gamma(u,v)}_{\hat{\nu}(\Gamma(u,v))}$$

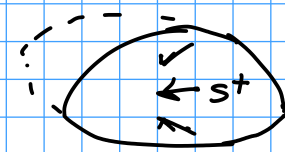
DUNQUE TUTTI GLI INTEGRALI CALCOLATI PRIMA COINCIDONO CON

$\Phi(\vec{k}, S, \hat{\nu})$. $(= \pi)$

$\Phi(\vec{j}, S, \hat{\nu})$ $(= 0)$

$\Phi(\vec{j}, S^+, \hat{\nu})$ $\left(= \dfrac{\pi}{2}\right)$

Se invece considero

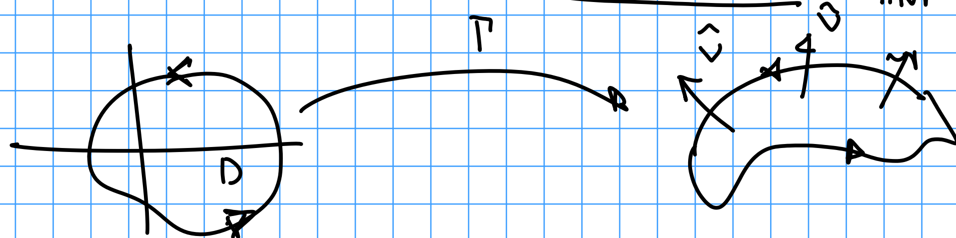


$$\phi(\vec{g}, S^+, -\hat{\nu}) = -\frac{\pi}{2}$$

IN GENERALE se mi occorre che $\frac{\vec{N}_\Gamma}{\|N_\Gamma\|} = -\hat{\nu}$

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{g}, S, \hat{\nu}) = -\phi(\vec{g}, \Gamma)$$

RICORDIAMO Dato $(S, \hat{\nu})$ superficie parametrizzata orientata E' DEFINITO IL VERSO DI $\Sigma(S)$ perché scelgo Γ coerente con $\hat{\nu}$ $\left(\frac{\vec{N}_\Gamma}{\|N_\Gamma\|} = \hat{\nu} \circ \Gamma\right)$



Prendo delle curve γ_i descrivono ∂D coerentemente con D e le trasferisco su $\Sigma(S)$ ponendo $\tilde{\gamma}_i = \Gamma \gamma_i$

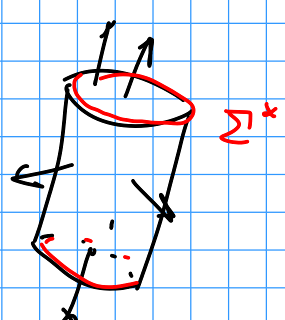
| per qualunque scelta delle γ_i $\Rightarrow$ le $\tilde{\gamma}_i$ sono concordi |

DEF (Generale di superficie orientata)

Sia S una superficie regolare e tutti

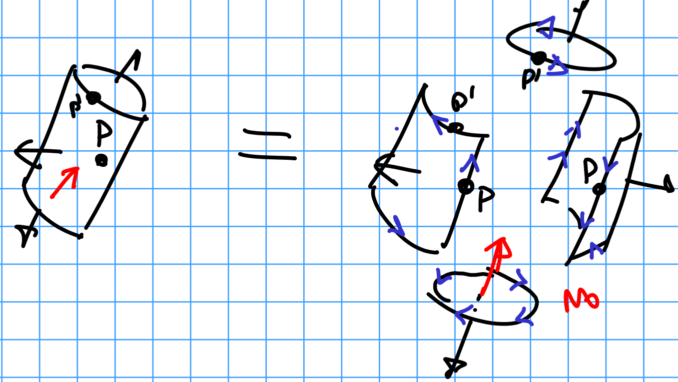
sia $\hat{\nu} : S \setminus \Sigma^*(S) \to \mathbb{R}^3$ $\hat{\nu}$ continua

e $\|\hat{\nu}\| = 1$



Dico che $\hat{\nu}$ è un'orientazione per S se

TROVO UNA DECOMPOSIZIONE $S_1 \dots S_n$ per S tale che ① ogni $(S_i, \hat{\nu})$ è una superficie orientata



$\Leftarrow$ TORNA $\left(\begin{array}{l} \Sigma(S) = \emptyset \\ S = \partial(\text{CILINDRO PIENO}) \end{array} \right)$

② Quando incollo le S_i nei punti $P \in S_i \cap S_j$ i versi di $\Sigma(S_i)$ e $\Sigma(S_j)$ SONO OPPOSTI (dunque "si semplificano")

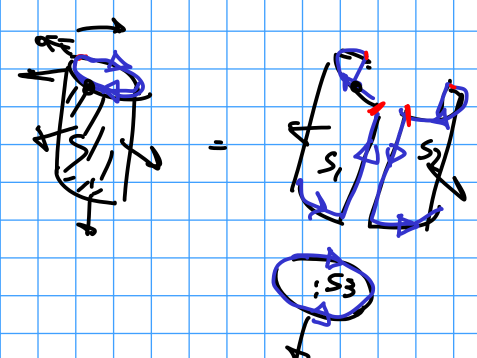
$$\hat{\nu}_i = \hat{\nu}\big|_{S_i}$$

POSSO DIRE CHE $(S_i, \hat{\nu}_i)$ sono una decomposizione per $(S, \hat{\nu})$

Se $(S, \hat{\nu})$ è una superficie orientata $\Rightarrow$ posso introdurre il verso su $\Sigma(S)$ coerente con l'orientazione $\hat{\nu}$. INFATTI se ho una decomposizione per $(S, \hat{\nu})$ fatta da $(S_1, \hat{\nu}), \dots, (S_n, \hat{\nu})$

So che $\Sigma(S)$ = "parti di $\Sigma^*(S)$ che non vengono incollate"

IL VERSO DI $\Sigma(S)$ in un punto $P \in \Sigma_i(S)$ è quello indotto da il verso del corrispondente $\Sigma(S_i)$ che passa per P

S = 

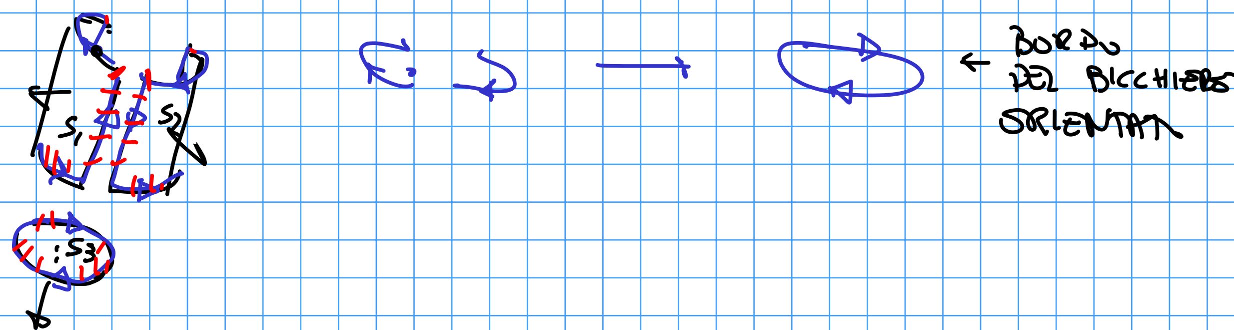
(S = bicchiere)

Rimane vero il fatto che il verso di $\Sigma(S)$ è quello percorso da un omino che gira su $\Sigma(S)$, con la testa nella direzione normale, tenendo S a sinistra

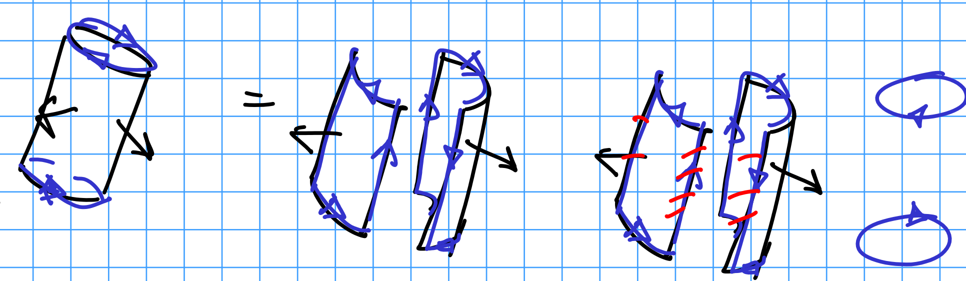
SI DIMOSTRA IN EFFETTI CHE IL $\Sigma'(S)$

è sostegno di un numero finito di curve $\gamma_1 \dots \gamma_k$ chiuse

che girano come detto sopra

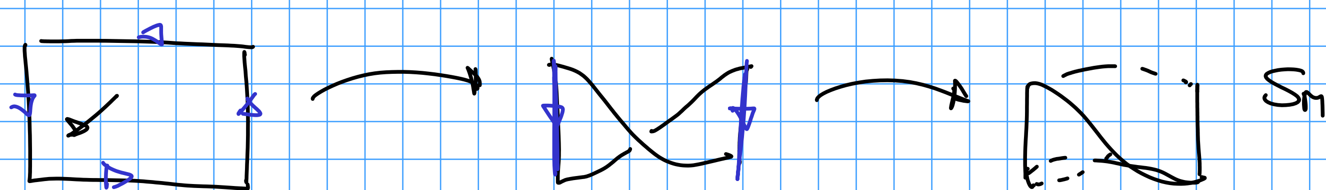


OPPURE $S =$ (senza tappi)



NON TUTTE LE SUPERFICI SONO ORIENTABILI

IL NASTRO DI MOEBIUS NON È ORIENTABILE



IN EFFETTI NON SI PUÒ NEANCHE SCEGLIERE $\hat{\nu}$ CONTINUA SU S_M con $\hat{\nu}$ NORMALE A S_M

Se S è una superficie reg. a tratti dico che è orientabile se trovo $\hat{\nu}$ tale che $(S, \hat{\nu})$ è una sup. reg. a tratti ORIENTATA

TEOREMA Se D è un dominio reg. e tutti $\boxed{\text{LIMITATO}}$

$\Rightarrow$ ∂D è una sup. regolare e tutti **ORIENTABILE**

INOLTRE POSSO SCEGLIERE "L'ORIENTAMENTO CANONICO" su ∂D, $\hat{\nu}$, tale che $\hat{\nu}$ è "uscente da D"

Per esempio $D = \{ x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \}$ $\qquad G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$S = \{ x^2 + y^2 + z = 1$ $\qquad \nabla G = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$S = \partial D$

$\hat{\nu}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftarrow$ È USCENTE DA D

$\hat{\nu}$ USCENTE DA D significa che $\hat{\nu}(P) = \dfrac{\nabla G_i(P)}{\|\nabla G_i(P)\|}$

dove G_i è l'unica delle G_j che si annulla in P

(P è pto regolare)

Ricordiamo che $\Sigma(\partial D) = \phi$.

DEF. Se $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^3$ continua, $(S, \hat{\nu})$ **sup orientata**

definisco il flusso di $\vec{f}$ attraverso $(S, \hat{\nu})$:

$$\phi(f, S, \hat{\nu}) = \iint_S f \cdot \hat{\nu} \, d\sigma := \sum_{i=1}^{n} \phi(f, S_i, \hat{\nu})$$

dove $(S_1, \hat{\nu}) \dots (S_n, \hat{\nu})$ è una decomposizione di $(S, \hat{\nu})$

SOLO SUP. ORIENTATE. NON POSSO CALCOLARE FLUSSI ATTRAVERSO IL NASTRO DI MOEBIUS.