Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

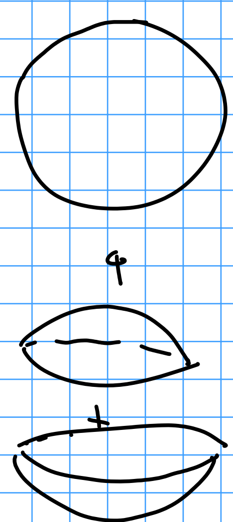
Lezione 60 03/05/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Def. (SUPERFICIE caso generale)

IDEA: Una superficie S verrà definita come "incollamento" di un numero finito di S_i sup. parametrizzate

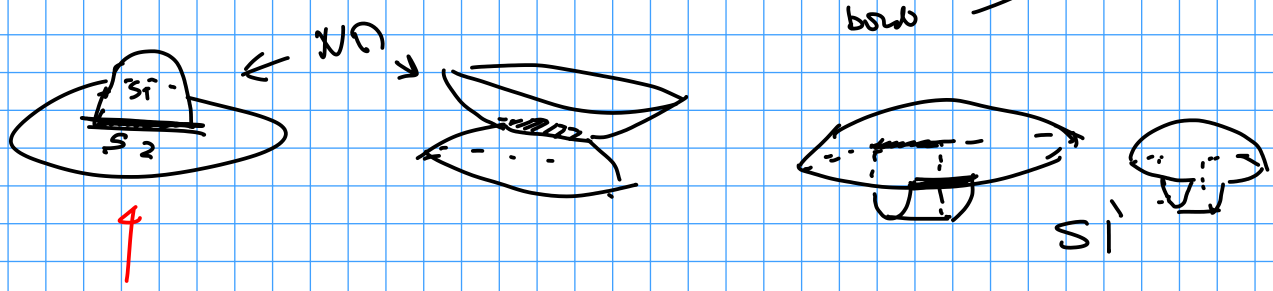


Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ Dico che S è una superficie (regolare a tratti) se esistono $S_1 \dots S_n$ superfici parametrizzate tali che

(a) $$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots S_n = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$$

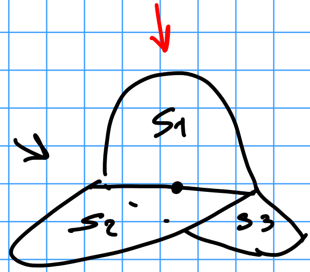
(b) se $i \neq j$, allora $S_i \cap S_j \subset \Sigma_1(S_i) \cap \Sigma_1(S_j)$

bordo



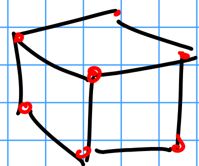
(c)

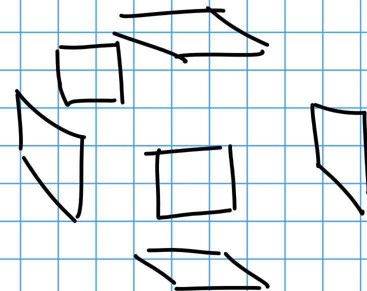
NO



I punti $x \in S$ tali che $\exists\, i \neq j \neq k$ con $x \in S_i \cap S_j \cap S_k$ $(x \in \Sigma(S_i) \cap \Sigma(S_j) \cap \Sigma(S_k))$ sono in numero finito

8!





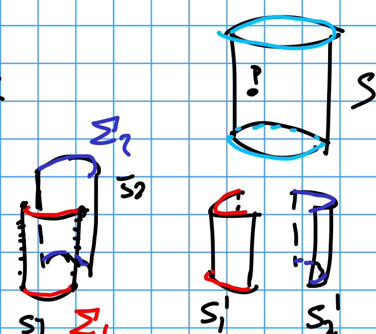
IN QUESTO CASO DICO CHE $S_1 \dots S_N$ è una DECOMPOSIZIONE per S

LEMMA Supponiamo che $S_1 \dots S_n$ e $S'_1 \dots S'_m$ siano due decomposizioni di S. ALLORA:

Chiamo $\Sigma_i = \Sigma(S_i) \setminus \bigcup_{k \neq i} S_k$

(la parte di $\Sigma(S_i)$ che non viene incollata)

e $\Sigma'_j = \Sigma(S'_j) \setminus \bigcup_{k \neq j} S'_k$



(a) ALLORA $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i} = \overline{\bigcup_{j=1}^{m} \Sigma'_j}$

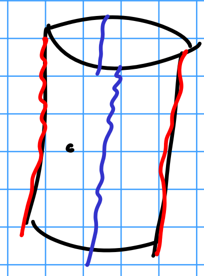
(b) Se $P \in S_i \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma(S_i)$ e $P \in S'_j \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \Sigma(S'_j)$

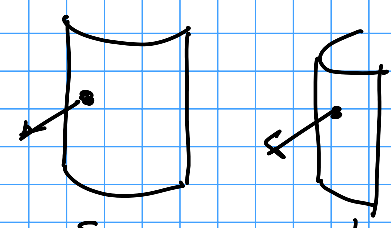
(P non è sui punti di incollamento né delle S_i né delle S'_j).

ALLORA piano tangente e retta normale su S_i e su S'_j COINCIDONO

$$T_{S_i}(p) = T_{S'_j}(p)$$

(e analogamente la retta normale)





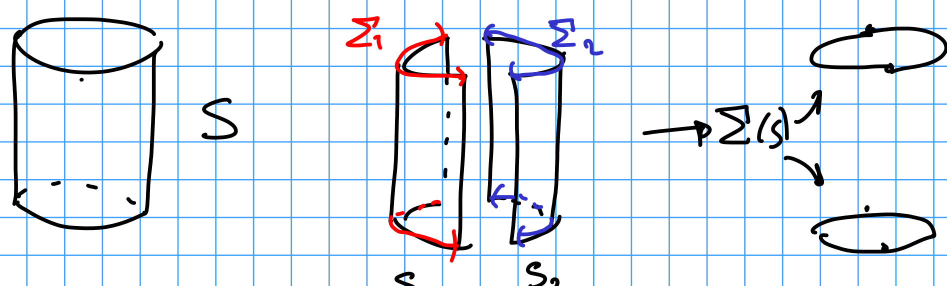
NON LO DIMOSTRO

DEFINIZIONI Se S è una superficie regolare a tratti

(1) definisco il bordo di S, che indico con $\Sigma(S)$, nel modo seguente: prendo $S_1 \dots S_n$ suddivisione di S, definisco $\Sigma_i = S_i \setminus \bigcup_{k \neq i} S_k$, e pongo

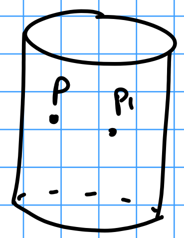
$$\Sigma(S) = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i$$

Lo (2) del Lemma mi assicura che $\Sigma(S)$ NON DIPENDE DALLA SUDDIVISIONE

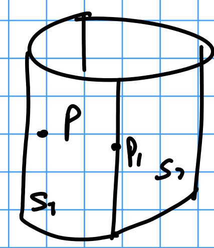


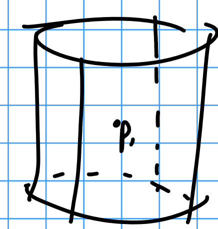
(2) Dato $P \in S$ dico che P è regolare se esiste una decomposizione $S_1 \dots S_n$ per S tale che

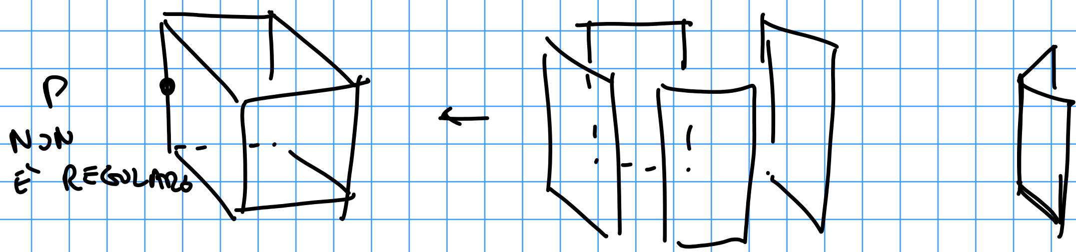
$P \in S_i \setminus \Sigma(S_i)$ per un $i \in \{1 .. n\}$



P è regolare
P_1 è regolare







NON È UNA SUP. PARAMETRIZZATA ("REGOLARE")

• Dico che P è *singolare* se P non è regolare

Pongo $\Sigma^*(S) = \{ P \in S : P \text{ è singolare} \}$

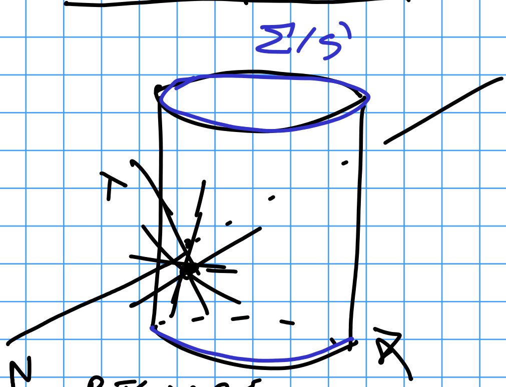
(3) Se $P \in S$, $P \notin \Sigma^*(S)$ posso definire il piano tangente e la retta normale a S in P

$$T_S(P) = T_{S_i}(P)$$

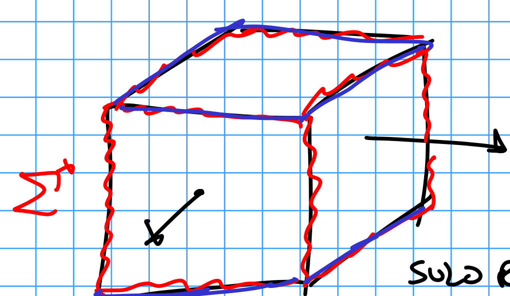
$$N_S(P) = N_{S_i}(P) \qquad \left(N_{S_i} = \{ \lambda \vec{N}_P \ \ \lambda \in \mathbb{R} \}, \ T \text{ parametr.} \right)$$

dove $S_1 .. S_n$ è una decomposizione di S, $i \in \{1 .. n\}$ tale che $P \in S_i \setminus \Sigma(S_i)$

La parte (b) del Lemma mi assicura che queste def. non dipendono dalla suddivisione



Normale e tangente esistono $\forall P \in S \setminus \Sigma(S)$



SOLO REGOLARE A TRATTI

$$\Sigma^*(S) = \Sigma(S) \qquad\qquad \Sigma^*(S) \supsetneq \Sigma(S)$$

DICO CHE S è una superficie regolare se $\Sigma^*(S) = \Sigma(S)$

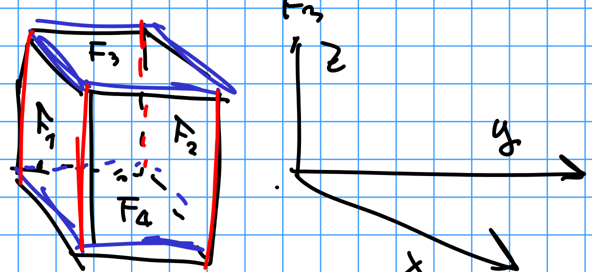
<u>ESEMPI</u> (fatti sopra con i disegni)

$C = \{ x^2+y^2 = 1,\ -1 \le z \le 1 \}$ (cilindro)

è una superficie regolare

$$\Sigma(C) = \{ x^2+y^2=1,\ z=-1 \} \cup \{ x^2+y^2=1,\ z=1 \}$$

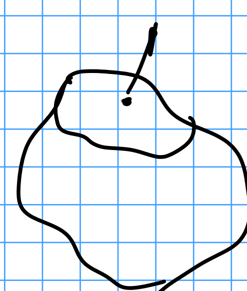
$$S = \overbrace{\{ |x| \le 1,\ |z| \le 1,\ y=-1 \}}^{F_1} \cup \overbrace{\{ |x| \le 1,\ |z| \le 1,\ y=1 \}}^{F_2} \cup$$
$$\underbrace{\{ |y| \le 1,\ |z| \le 1,\ x=-1 \}}_{F_3} \cup \underbrace{\{ |y| \le 1,\ |z| \le 1,\ x=1 \}}_{F_4}$$



$\Sigma(S)$ = ZONA BLU $\qquad\qquad$ $\Sigma^*(S)$ = ZONA BLU + ZONA ROSSA

<u>TEOREMA</u> SUPPONIAMO CHE $D \subset \mathbb{R}$ sia un dominio regolare e tratti. ALLORA LA FRONTIERA DI D è UNA SUPERFICIE REGOLARE A TRATTI

$\boxed{\partial D}$



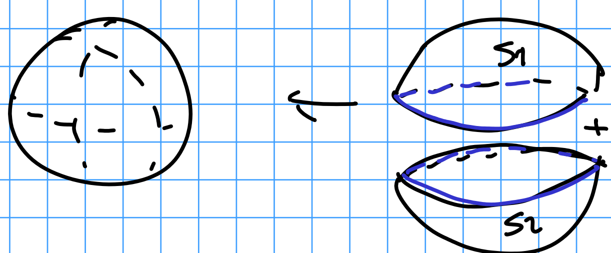
(è una conseguenza del teorema del Dini

VICINO A OGNI PUNTO DI ∂D descrivo

∂D come un grafico)

INOLTRE $\Sigma(\partial D) = \emptyset$

<u>ESEMPI</u> • La sfera $S=\{x^2+y^2+z^2=1\}$ è la frontiera di $D=\{x^2+y^2+z^2\leq 1\}$ $\qquad \Sigma(S)=\emptyset$



{ TUTTO $\Sigma(S_1)$ e TUTTO $\Sigma(S_2)$ SI INCOLLA

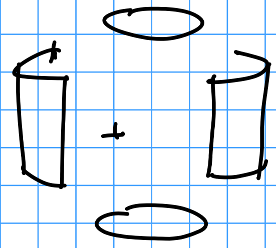
• LA SUPERFICIE DEL CUBO ∂Q , $Q=\{|x|\leq 1, |y|\leq 1, |z|\leq 1\}$ (ha sei facce) è una superficie regolare a tratti

• LA "SUPERFICIE TOTALE DEL CILINDRO"

$C=\partial D$ dove $D=\{x^2+y^2\leq 1 \quad |z|\leq 1\}$

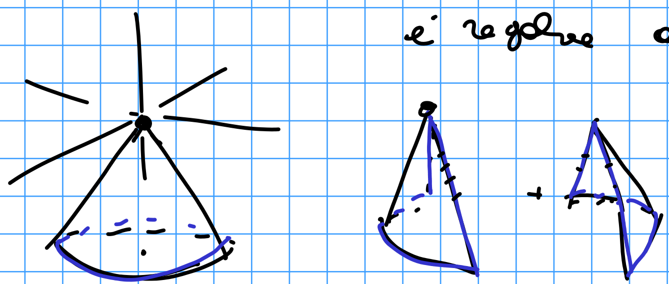
è una superficie regolare a tratti (senza bordo)

NO NORMALE $\Sigma^*(C)=$ le due curve blu $\qquad \Sigma(C)=\emptyset$



le normali e le tangenti a C esistono fuori da $\Sigma^* C$

• IL CONO $C = \{ x^2+y^2 = z^2 , \ -1 \le z \le 0 \}$



è regolare a tratti. il suo bordo è

$\{ x^2+y^2=1 , \ z = -1 \}$

$\Sigma^* = \Sigma$ + punto $(0,0)$

<u>FATTO</u> Se D è regolare ($D = \{ G \le 0 \}$ con G C^1 e $\nabla G \neq 0$ nei punti in cui $G = 0$)

$\Rightarrow S = \partial D = \{ G = 0 \}$ è una <u>superficie REGOLARE</u> con $\Sigma(S) = 0$

IN QUESTO CASO $N_S(P) = \{ \lambda \nabla G(P) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

ESEMPIO: La sfera $S = \{ x^2+y^2+z^2 = 1 \}$ è una superficie regolare; se $P \in S$ $N_P(S) = \{ \lambda P \ \ \lambda \in \mathbb{R} \}$

$G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, $\nabla G(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$ $\lambda \nabla G = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

• Se $D = \{ G_1 \le 0 \cdots G_k \le 0 \}$. Allora

$S = \partial D = \{ G_1 = 0 , G_i \le 0 \ i \neq 1 \} \cup \cdots \cup \{ G_k = 0 , G_i \le 0 \ i \neq k \}$

è regolare a tratti e

$\Sigma^*(S) = \bigcup \{ G_i = G_j = 0 , \ i \neq j \}$

Se $P \in \Sigma^*(S)$ $\Rightarrow$ $N_P(S) = \{ \lambda \nabla G_i \ \ \lambda \in \mathbb{R} \}$

dove G_i è l'unica tra $G_1 .. G_k$ che si annulla in P

ESEMPIO $\quad C = \partial D$ dove $D = \{x^2+y^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$

HO TRE G_i
$$G_1(x,y,z) = x^2+y^2-1$$
$$G_2(x,y,z) = z-1$$
$$G_3(x,y,z) = -z-1$$

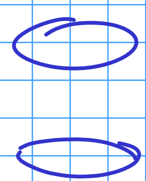
(verifico le ipotesi di trasversalità tipo DINI $\Rightarrow$ D è reg. chiuso)

$$\Rightarrow C = \{x^2+y^2=1,\ |z|\leq 1\} \cup \{x^2+y^2 \leq 1,\ z=1\} \cup \{x^2+y^2\leq 1,\ z=-1\}$$

$$(\Sigma(C) = \emptyset)$$

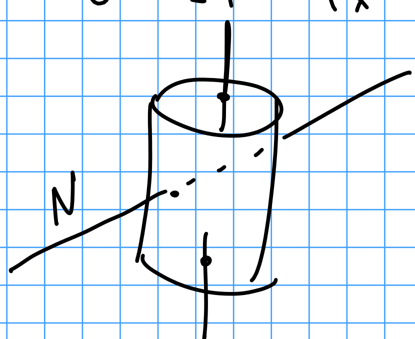
$G_3<0 \qquad G_2<0 \qquad \emptyset$

$$\Sigma^*(C) = \underbrace{\{x^2+y^2=1,\ z=1\} \cup \{x^2+y^2=1,\ z=-1\}} \cup \{x^2+y^2\leq 1,\ G_2=G_3=0\}$$



se $P=(x,y,z) \in C \setminus \Sigma^*(C)$ a sono fa così

$$\begin{array}{lll} x^2+y^2=1 & (|z|<1) & \\ z = 1 & (x^2+y^2<1) & \Rightarrow \\ z=-1 & (x^2+y^2<1) & \end{array} \qquad \begin{array}{l} N_P = \left\{\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \nabla G_1\right\} \\ N_P = \left\{\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \nabla G_2\right\} \\ N_P = \left\{\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \nabla G_3\right\} \end{array}$$



PAUSA $\rightarrow$ 10.00

PROPOSTA DATA IV COMPITINO

$\rightarrow$ 4 GIUGNO $\quad \boxed{31/5 \leq 5/6 \ ??}$

Def. Data S sup. reg. a tratti, data $f: S \to \mathbb{R}$ continua definisco

$$\iint_S f \, d\sigma := \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} f \, ds$$

dove $S_1 \dots S_n$ è una decomposizione di S

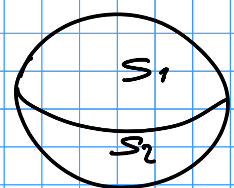
(SI DIMOSTRA CHE $\iint_S f \, d\sigma$ NON DIPENDE DALLA DECOMPOSIZIONE)

$$\text{Area}(S) = \iint_S 1 \, d\sigma$$

ESEMPIO Se $S = \{x^2+y^2+z^2=1\} \Rightarrow$

$$\text{Area}(S) = 4\pi$$

Perché $S = S_1 \cup S_2$ con



$\text{Area}(S_1) = 2\pi$ (già visto)

$\text{Area}(S_2) = 2\pi$ (stesso ragionamento)

S_1 = grafico di $\sqrt{1-x^2-y^2}$

S_2 = grafico di $-\sqrt{1-x^2-y^2}$

- **Area cono** (già visto) si può definire in modo rigoroso vedendo $C = C_1 \cup C_2$

....

ESEMPIO $S = \{x^2+y^2+z^2=1\}$

$$\iint_S (x+y) \, d\sigma$$

A rigore dovrei dividere S in $S_1 \cup S_2$ **PERÒ**

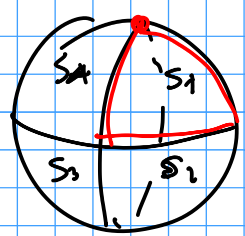
Dato che i punti di incollaggio sono "trascurabili" e

POSSO USARE LE COORDINATE SFERICHE E FARE TUTTO IN UN COLPO SOLO. DUNQUE

CONSIDERO $\Gamma(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$

$0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le \varphi \le \pi$ (Γ NON SAREBBE UNA PARAMETRIZZAZIONE

MA VA BENE PER FARE GLI INTEGRALI!)



SU OGNI S_i LE COORD. SFERICHE SONO UNA PARAMETRIZZAZIONE

$$\iint_S f = \iint_{S_1} f + \dots \iint_{S_8} f = \iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi}} f(\Gamma(\varphi)) \|\vec{N}_\Gamma\| \, d\theta d\varphi$$

DUNQUE

$$\iint_S (x+y)\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\overbrace{\cos\theta}^{x} + \overbrace{\sin\theta}^{y}) \sin\varphi \, \overbrace{\sin\varphi \, d\theta d\varphi}^{d\sigma}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} (\cos\theta \sin^2\varphi + \sin\theta \sin^2\varphi)\, d\theta\, d\theta =$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} (\sin\theta + \cos\theta)\, d\theta}_{=0} \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = 0$$

Se invece

$$\iint_S |x+y|\, d\sigma = \dots = \underbrace{\int_0^{2\pi} |\sin\theta + \cos\theta|\, d\theta}_{1} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi}_{2} = 2\sqrt{2}\pi$$

$$① = \int_0^{2\pi} \left|\sqrt{2}\left(\sin\left(\theta + \pi/4\right)\right)\right| d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\sin\theta|\, d\theta =$$

$$\sin\theta \cos\pi/4 + \cos\theta \sin\pi/4$$

$$2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin\theta = 2\sqrt{2}\left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi} = 4\sqrt{2}$$

$$② = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\, d\theta = \frac{\pi}{2} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2\theta \, d\theta}_{=0} = \frac{\pi}{2}$$