Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 59   28/04/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ABBIAMO INTRODOTTO $\iint_S f \, d\sigma$

definito da $\iint_S f \, d\sigma := \iint_D f(\Gamma(u,v)) \, \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv$

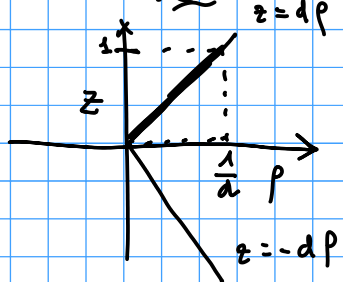
dove $\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione per S, cioè
$\Gamma(D) = S$, Γ continua su D, C^1 su $\mathring{D}$,
Γ iniettiva e $\vec{N}_\Gamma := \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \neq 0$

In particolare l'area di S:

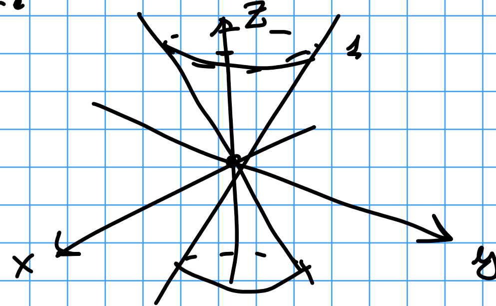
$$\text{Area}(S) := \iint_S 1 \, d\sigma = \iint_D \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv$$

ESEMPIO $S := \{(x,y,z) : z^2 = \alpha^2 (\underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2}), \ 0 \le z \le 1\}$ $(\alpha > 0)$

Vediamo se S è una superficie

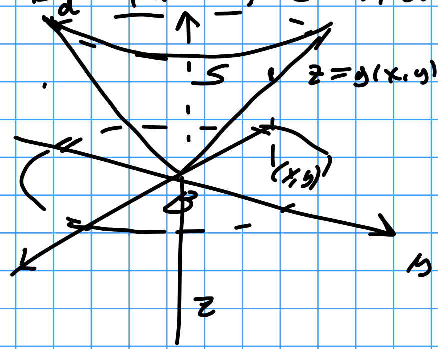


$z^2 = \alpha \rho^2$
$|z| = \alpha\rho$



si vede che S è il grafico della funzione $g(x,y) = d\sqrt{x^2+y^2}$

definita su $B_d = \{x^2+y^2 \leq 1/d^2\}$



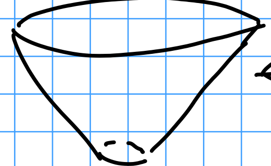
C'È UN PROBLEMA (che lascio in sospeso) : g non è C^1 su $\mathring{B}$

perché g non è differenziabile in $(0,0)$:

$$\nabla g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

$(x,y) \neq (0,0)$ $\qquad \frac{\partial}{\partial y} \ldots$

S <u>non è</u> veramente una superficie parametrizzata, per come l'ho definita fino a qui. Lo sarebbe se togliessi un dischetto intorno a zero



← questo è OK.

$\leftarrow \varepsilon^2 \leq x^2+y^2 \leq \frac{1}{d^2}$

Facciamo finta di niente. Voglio calcolare <u>l'area di S</u>

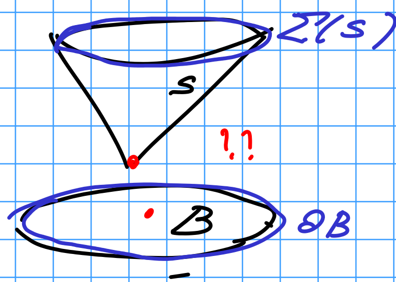
(ci potrei arrivare come $\lim_{\varepsilon \to 0}$ Area(S_ε) ...)

<u>NOTA</u> $\quad \Sigma(S) = \left\{ (x,y,z) : \; x^2+y^2 = \frac{1}{d^2}, \; z = 1 \right\}$

perché $\partial B = \left\{ u^2+v^2 = \frac{1}{d^2} \right\}$ e

$$\Gamma(u,v) = (u, v, g(u,v)) \implies \ldots$$

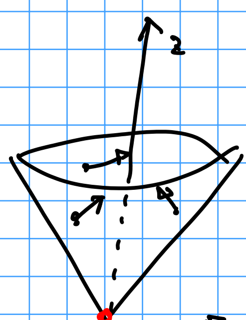
se $(u,v) \in \partial B \Rightarrow \Gamma(u,v) = (u,v,1)$



<u>OSS.</u> Consideriamo su $S^* = S \setminus \{(0,0,0)\}$ il campo di vettori $\hat{\nu}(x,y,z) = \dfrac{\vec{\nu}}{\|\vec{\nu}\|}$

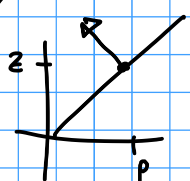
dove $\vec{\nu}(x,y,z) = \begin{bmatrix} -D_u g \\ -D_v g \\ 1 \end{bmatrix}$

Solo scegliendo uno campo di vettori normali unitari su S^*. $\hat{\nu}$ e' concorde con $\vec{k}$.



si vede che se

$$\hat{\nu}(x,y,z) = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{bmatrix} \qquad c^2 + x^2 + y^2 = 1$$



$$g(u,v) = d\sqrt{u^2+v^2}$$

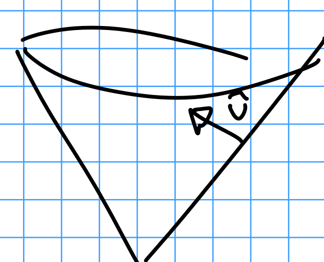
$$\nabla g = \frac{d}{\sqrt{u^2+v^2}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_\Gamma(u,v) = \vec{\nu}(u,v) = \begin{bmatrix} -\nabla g \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{du}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ -\dfrac{dv}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|^2 = \|\vec{\nu}\|^2 = \frac{d^2u^2 + d^2v^2}{u^2+v^2} + 1 = \underline{d^2+1} \qquad = d^2+$$

$$\|\vec{\nu}\| = \sqrt{1+d^2}$$

$$\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}} \begin{bmatrix} -\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$



COSA HO FATTO ??

· Ho PRESO $\Gamma(u,v) = (u, v, g(u,v))$

· Ho calcolato $\vec{v} := \vec{N}_\Gamma(u,v) = \begin{bmatrix} -D_u g \\ -D_v g \\ 1 \end{bmatrix}$

- Ho definito $\hat{\nu}(x,y,z) = \dfrac{\vec{N}_\Gamma(u,v)}{\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|}$ se $x,y,z = \Gamma(u,v)$

★ $\hat{\nu}(x,y,g(x,y)) := \dfrac{\vec{N}_\Gamma(x,y)}{\|\vec{N}_\Gamma(x,y)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+d^2}} \begin{bmatrix} -\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$

IN REALTA' VOGLIO FARE UN PERCORSO DIVERSO.

· Ho la superficie S. Ho il campo $\hat{\nu}$ definito

· Verifico che c'è una parametrizzazione Γ per cui

$$\hat{\nu} = \frac{\vec{N}_\Gamma}{\|N_\Gamma\|}$$ (Γ è quella di sopra).

ALLORA $(S, \hat{\nu})$ è una superficie ORIENTATA

CON QUESTA "ORIENTAZIONE" POSSO CERCARE DI DESCRIVERE $\Sigma(S)$ coerentemente con $\hat{\nu}$.

PER FARLO DEVO SCEGLIERE $\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ in modo che valga ★ ; prendo una curva γ che descrive ∂D coerentemente con D e trasferisco su $\Sigma(S)$.

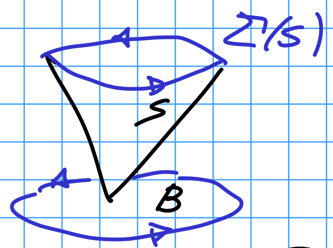
Nel nostro caso. $\Gamma = (u, v, g(u,v))$, $D = B$

$\partial B = \{x^2+y^2 = 1/d^2\}$ che posso descrivere con

$$\gamma(t) = \frac{1}{d}(\cos(t), \sin(t))$$

$\Rightarrow \quad \tilde{\gamma} = \Gamma(\gamma)$ cioè

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(\frac{1}{d}\cos(t),\ \frac{1}{d}\sin(t),\ 1\right) \leftarrow$$

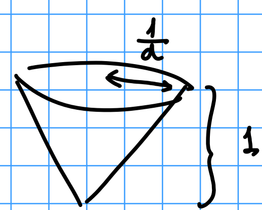


Calcoliamo $A(S)$ (c'è sempre il problema del vertice...)

$$A(S) = \iint_B \|\vec{N}_\Gamma\|\, du\, dv =$$

$$\iint_{\{u^2+v^2 \le \frac{1}{d^2}\}} \sqrt{1+d^2}\, du\, dv = \sqrt{1+d^2}\left(\text{area del cerchio di raggio } \frac{1}{d}\right) =$$

$$\boxed{\sqrt{1+d^2}\ \frac{\pi}{d^2}}$$

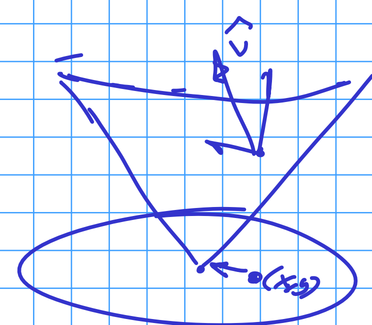


---

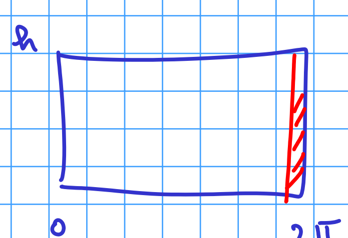
oss.

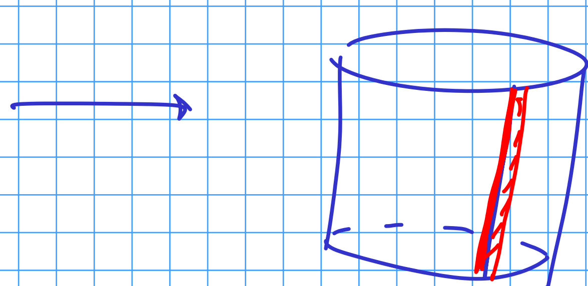
$$\hat{v}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{d^2+1}\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} -dx \\ -dy \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$(z = d\sqrt{x^2+y^2})$



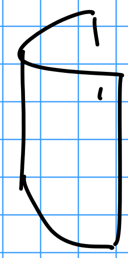
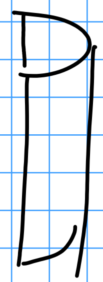
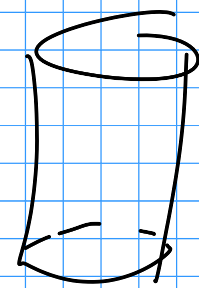
C

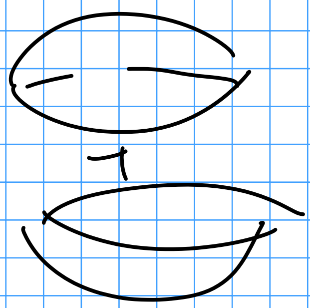




?? $\Sigma(C)$

No

 +  = 

 +