Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 58 27/04/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

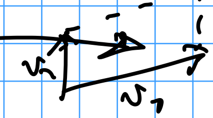
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$S \subset \mathbb{R}^3$ SUPERFICIE PARAMETRIZZATA se esistono $D \subset \mathbb{R}^2$ dominio regolare a tratti (CHIUSO) e $\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ tali che

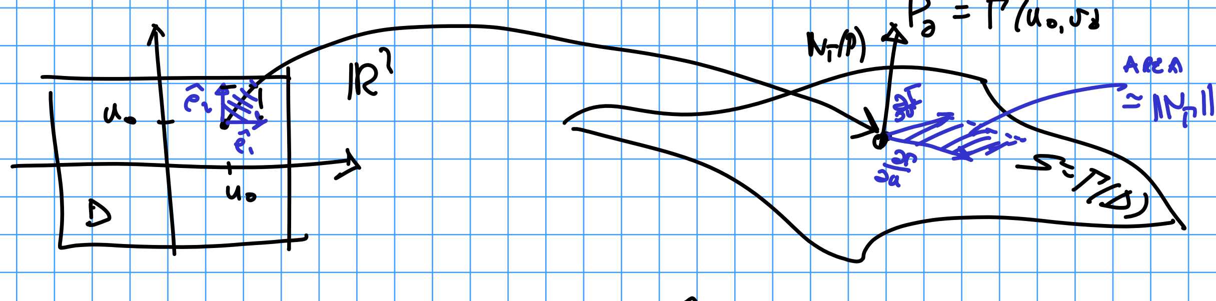
- Γ è C^1 su $\overset{\circ}{D}$ e continua su D, $\Gamma(D) = S$
- Γ è iniettiva
- $N_\Gamma := \dfrac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v} \neq 0 \quad \forall (u,v) \in D$

(Γ è una "parametrizzazione" per S)

<u>OSS</u> Ricordo che se $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ e se $\vec{w} := \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2$
si ha $\vec{w}$ è perpendicolare a $\vec{v}_1$ e a $\vec{v}_2$,
$\|\vec{w}\|$ = area del parallelogramma $\vec{v}_1, \vec{v}_2$
$\vec{w}$ è una "terna destrorsa".



DUNQUE

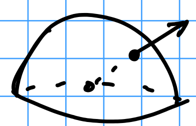


$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = d\Gamma \cdot \hat{e}_1 \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = d\Gamma\, \hat{e}_2$$

$\|N_\Gamma(u_0,v_0)\|$ mi dice come si "trasforma l'area" tramite Γ

$$\simeq \frac{\text{Area (PARALLELOGRAMMA IN ARRIVO)}}{\text{Area (QUADRATINO IN PARTENZA)}}$$

TORNIAMO ALL'ESEMPIO $S = \{x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0\}$



← Posso parametrizzare S come grafico della funzione $g : B \to \mathbb{R}$ $B = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

$$g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

· OPPURE (???) posso usare le coordinate sferiche

$0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$

$$\Gamma(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

← NON VERIFICA TUTTE LE IPOTESI

· NON E' INIETTIVA: $\theta = 0$ $\theta = 2\pi$ → stesso punto

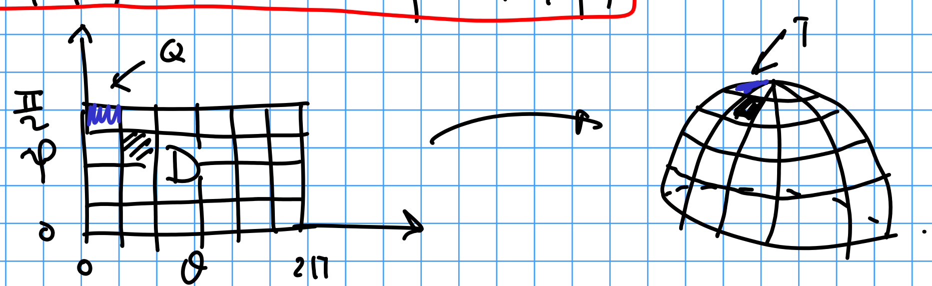
$\varphi = 0$ $\forall \theta$ → stesso punto (polo nord)

· $\|N_\Gamma\| = 0$ se $\varphi = 0$ perché

$$\boxed{N_\Gamma(\theta,\varphi) = -\sin\varphi\, \Gamma(\theta,\varphi)}$$ ← SI ANNULLA IN $\varphi = 0$

$\|N_\Gamma\| = \sin\varphi$

IN EFFETTI



PIU' φ si avvicina a zero più il rapporto $\frac{\text{Area}(T)}{\text{Area}(Q)} \simeq 0$

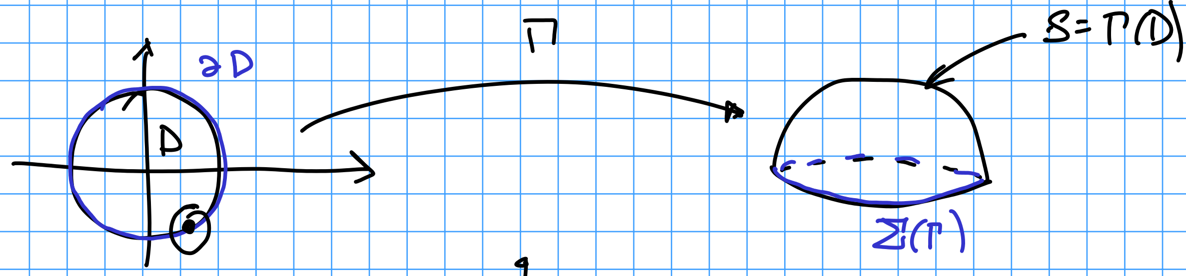
CONTINUAZIONE DELLA DEF.

Data Γ come sopra (Γ superficie parametrica)

$$\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$$

Chiamo **BORDO DI Γ** l'insieme

$$\Sigma(\Gamma) := \Gamma(\partial D)$$



STO USANDO $\Gamma(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$

STO USANDO IL TERMINE "FRONTIERA" per indicare

$$\partial A = \{ x : \forall r > 0 \ \exists x_1 \in A \ \exists x_2 \notin \text{ con } \|x_1 - x\| < r, \|x_2 - x\| < r \}$$

NOTIAMO CHE, se $S = \Gamma(D)$, SI HA

$$\partial S = S \quad \text{mentre} \quad \Sigma(S) = \Gamma(\partial D) \neq S$$

(IN $\mathbb{R}^3$, S è "sottile", tutti i punti di S sono di frontiera per S — LO SI DIMOSTRA)

- Se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie PARAMETRIZZATA chiamo BORDO DI S, e lo indico con $\Sigma(S)$, il bordo di una qualunque parametrizzazione Γ tale che $S = \Gamma(D)$. (SI DIMOSTRA CHE $\Sigma(S)$ non dipende da Γ, purché Γ verifichi le ipotesi)

$\Big($ Γ_1 e Γ_2 verificano le ipotesi e $\Gamma_1(D_1) = \Gamma_2(D_2) \Rightarrow$
$\Gamma_1(\partial D_1) = \Gamma_2(\partial D_2)$ $\Big)$

TORNIAMO ALL'ESEMPIO $S=\{x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\}$

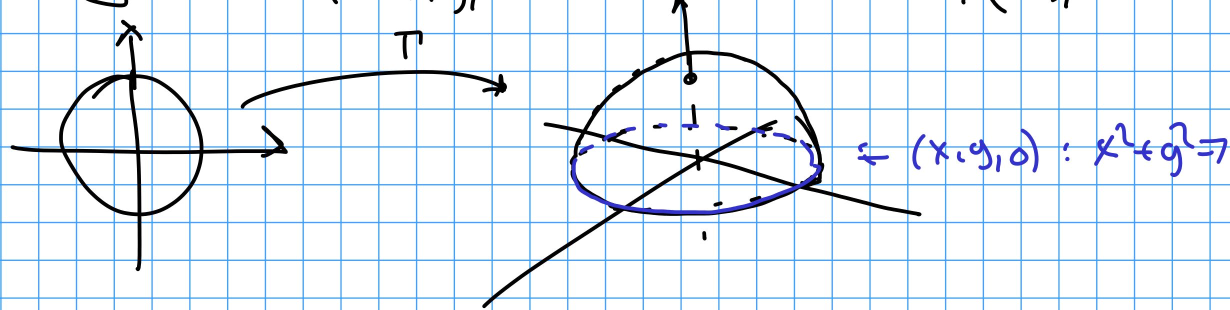
Se uso la parametrizzazione $\Gamma(u,v)=(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$

$\Gamma: B\to\mathbb{R}^3$ $\quad B=\{u^2+v^2\leq 1\}$ $\quad\Rightarrow$

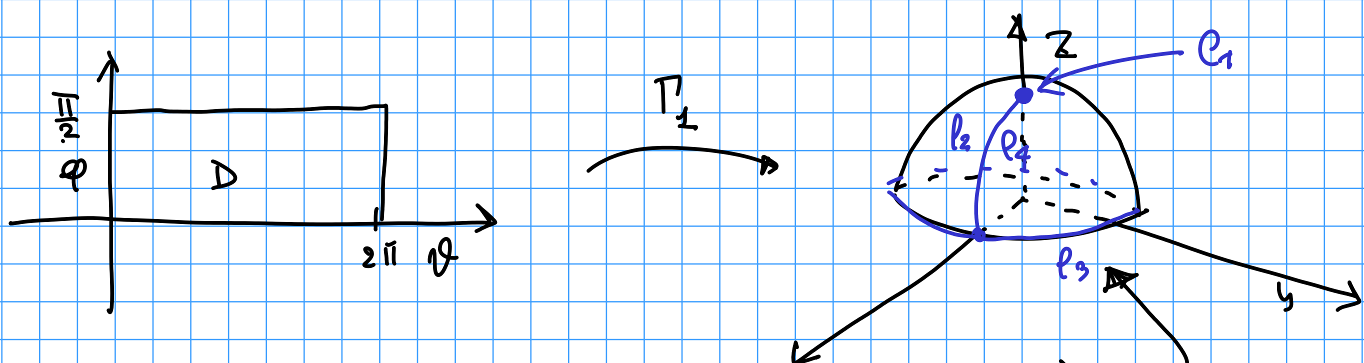
$$\partial D=\{u^2+v^2=1\}$$

Se $(u,v)\in\partial D \Rightarrow \Gamma(u,v)=(u,v,0)$

$\Leftrightarrow \Sigma(S)=\{(x,y,z)\in S : z=0\}=\{(x,y,0): x^2+y^2=1\}$



SE USO LE COORDINATE SFERICHE HO DEI PROBLEMI



$\partial D=\ell_1\cup\ell_2\cup\ell_3\cup\ell_4$

$\ell_1=\{(\theta,0)\quad 0\leq\theta\leq 2\pi\}$

$\ell_2=\{(2\pi,\varphi)\quad 0\leq\varphi\leq\pi/2\}$

$\ell_3=\{(\theta,\pi/2)\quad 0\leq\theta\leq 2\pi\}$

$\ell_4=\{(0,\varphi)\quad 0\leq\pi/2\}$

$\partial(D)=$

$\{P\in D: z=0\}\cup$

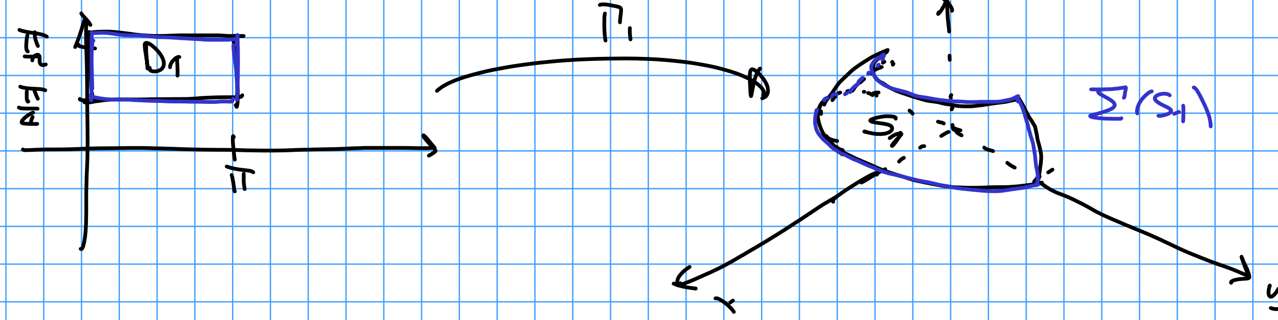
$\{P\in D: y=0\quad x\geq 0\}$

NON Γ_1 È $\Sigma(D)$

Per definire $\Sigma(S)$ ho bisogno di avere Γ iniettiva

Se invece prendessi Γ_1 = "coord. sferiche" ma su

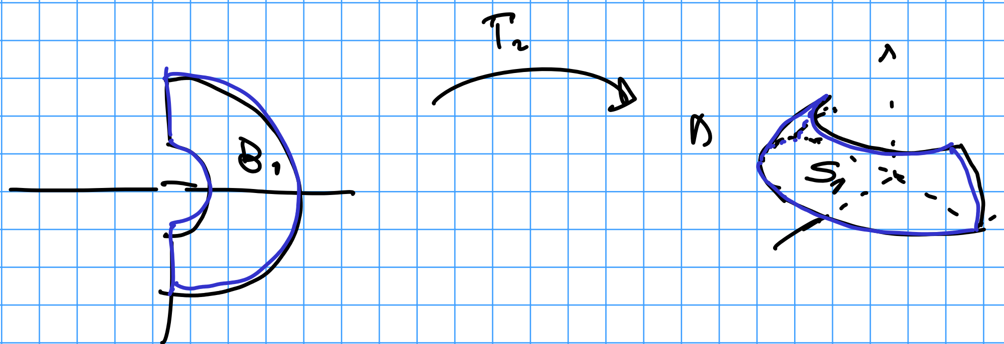
$$D_1=\left\{0\leq\theta\leq\pi,\ \frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$



$S_1 = T_1(D_1)$ è un pezzo della S di prima

Questo S_1 si può anche vedere come grafico di $g(u,v) = \sqrt{1-u^2-v^2}$ solo che $g : B_1 \to \mathbb{R}^3$

$$B_1 = \left\{ \frac{1}{2} \leq u^2+v^2 \leq 1 ,\ u \geq 0 \right\}$$



ENTRAMBE LE PARAMETRIZZAZIONI SONO INIETTIVE e verificano tutto

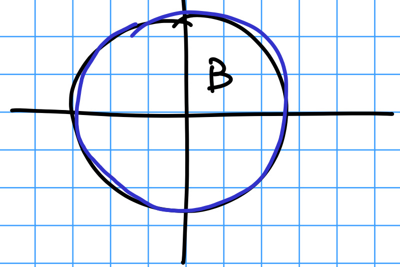
ENTRAMBE MI DANNO $\Sigma(S_1)$

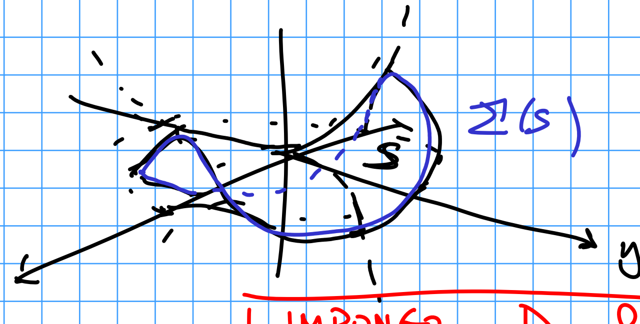
ALTRO ESEMPIO

$$S = \{ (x,y,z) : \quad x^2+y^2 \leq 1 \quad z = x^2 - y^2 \}$$

S è una sup. parametrizzata perché trovo una parametrizzazione. IN EFFETTI S è il grafico della funzione $g : B \to \mathbb{R}^3$ dove $B = \{u^2+v^2 \leq 1\}$ e $g(u,v) = u^2 - v^2$

(MI SERVE che il dominio D di g sia un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ e che g sia C^1 su D° e continua su D)





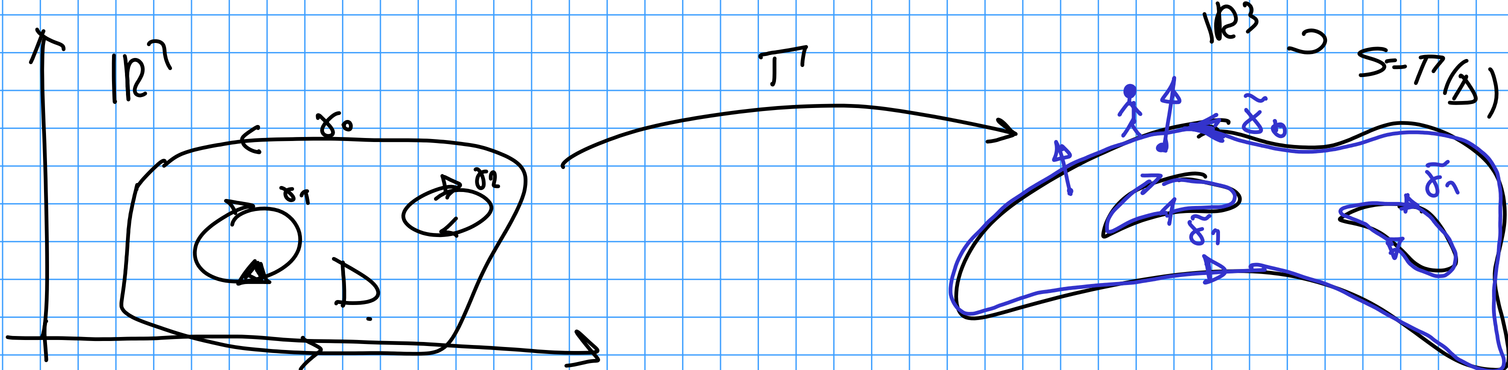
IMPONGO D limitato
(se ieri non l'ho scritto da ora in poi lo chiedo

CONTINUAZIONE DELLA DEF.

POSSIAMO DESCRIVERE $\Sigma(S)$ mediante delle curve con verso "coerente con S"

$\Gamma : D \to \mathbb{R}^3 (\dots)$. Ricordo che ∂D si descrive mediante K curve $\gamma_0\ \gamma_1 \dots \gamma_K : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

γ_i CHIUSE che percorrono ∂D "tenendo D a sinistra"



$(\partial D = \gamma_0([a,b]) \cup \gamma_1([a,b]) \dots \gamma_K([a,b])$ + legge sul verso $)$

Date queste curve $\gamma_0\ \gamma_1 \dots \gamma_K$ posso definire

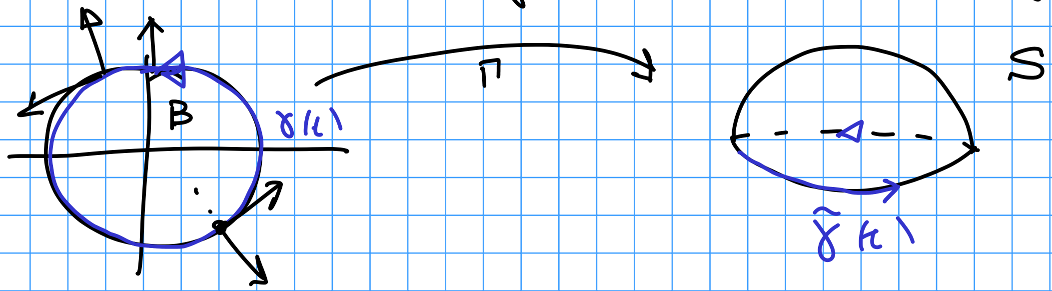
$$\tilde{\gamma}_0\ \tilde{\gamma}_1 \dots \tilde{\gamma}_K : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{ponendo}$$

$$\tilde{\gamma}_i(t) := \Gamma(\gamma_i(t))$$

si potrebbe vedere che le $\tilde{\gamma}_i$ percorrono $\Sigma(S)$ tenendo S a sinistra tenendo l'asse piedi-testa nella direzione normale a S

LA NOZIONE DI VERSO SU $\Sigma(S)$
dipende da $\Gamma \leftrightarrow$ dipende dal verso della normale

Torniamo all'esempio della calotta sferica



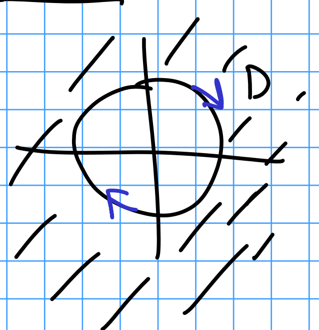
$\Gamma(u,v) = u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}$

Posso descrivere ∂B con una (sola) $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} \in \mathbb{R}^3$

il verso di γ è COERENTE con B (si vede dal disegno)

NOTA SE CONSIDERASSI $D = \{u^2+v^2 \geq 1\} = \complement \mathring{B}$



$\partial D = \partial B$ MA IL VERSO CANONICO su ∂D è opposto a quello su ∂B

$\gamma_1(t) = \cos(-t)\vec{i} + \sin(-t)\vec{j} = \cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j}$

Allora $\Sigma(S) = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1, z = 0\}$ è descritto da $\tilde{\gamma}(t) = \Gamma(\gamma(t)) =$

$$\left(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}\right) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

$$= \boxed{\cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + 0\vec{k} \in \mathbb{R}^3}$$

QUI IL VERSO È LEGATO ALLA PARAMETRIZZAZIONE

Potrei cambiare Γ, continuando a descrivere S, ma invertendo il verso di percorso.

MODO BANALE (poi faccio un altro esempio)

$\Gamma_1 : B \to \mathbb{R}^3$

$\Gamma_1(u,v) = (v, u, \sqrt{1-u^2-v^2})$ (ho scambiato u e v)

Si vede subito che $\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v} = - \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}$

CAMBIA IL VERSO DI N_{Γ_1} = opposto a quello di N_Γ

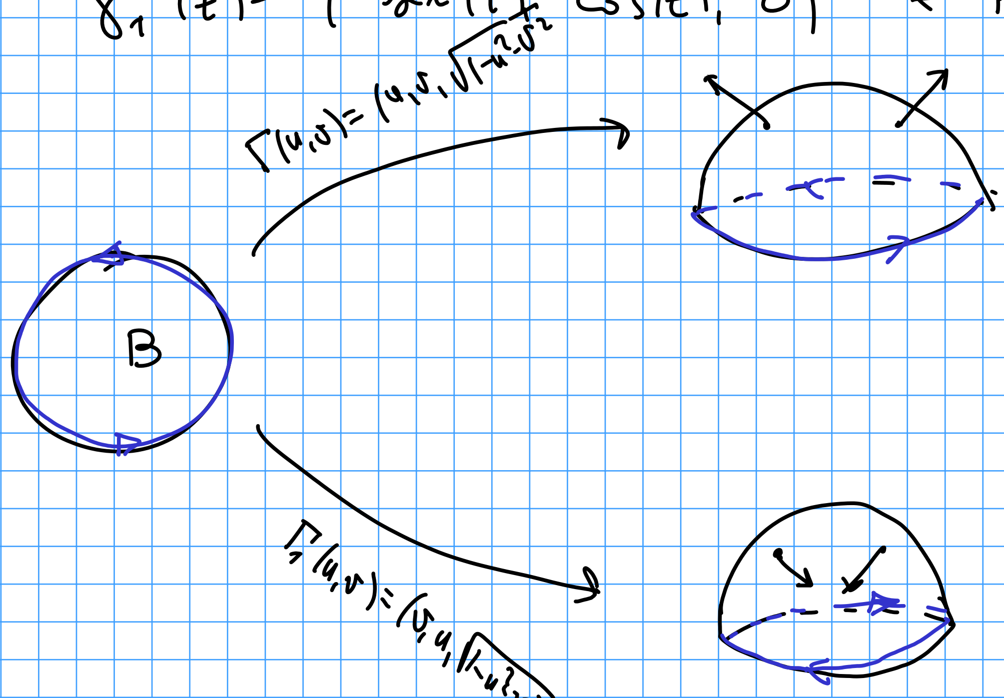
e CAMBIA IL VERSO DI PERCORRENZA CANONICO DI $\Sigma(S)$

- COMUNQUE :

$$\Gamma(\partial D) = \Gamma_1(\partial D) = \{x^2+y^2=1, z=0\}$$

MA se trasferisco la curva $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con Γ_1 trovo

$\tilde{\gamma}_1(t) = (\sin(t), \cos(t), 0)$ ⇒ HA L'ALTRO VERSO



- SE CAMBIO LA PARAMETRIZZAZIONE POSSONO CAMBIARE CONTEMPORANEAMENTE

il verso di $\vec{N}_\Gamma$ e il verso canonico del $\Sigma(S)$

(SI DIMOSTRA)

Dunque: dato S → se trovo una parametrizzazione Γ S è una superficie e risultano definite (INDIPENDENTEMENTE DA Γ)

- il bordo $\Sigma(S)$
- la retta normale a ogni punto di $S \setminus \Sigma(S)$

SE D è CONNESSO

Posso poi suddividere le parametrizzazioni in due sottoinsiemi $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. Se Γ_1 Γ_2 stanno nello stesso $\mathcal{P}$ $\Rightarrow$ le normali e i bordi hanno lo stesso verso, se Γ_1 e Γ_2 sono in $\mathcal{P}_i$ diversi $\Rightarrow$ le normali e i bordi hanno verso opposto #

PAUSA → 12.10

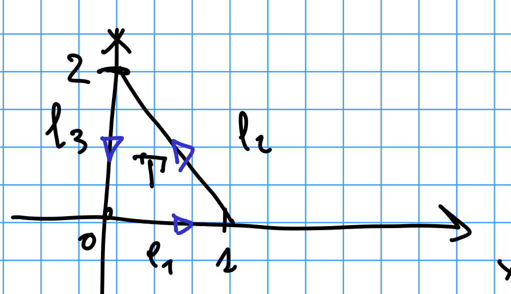
ESEMPIO $\quad S = \{ (x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \; 6x+3y+z = 6 \}$

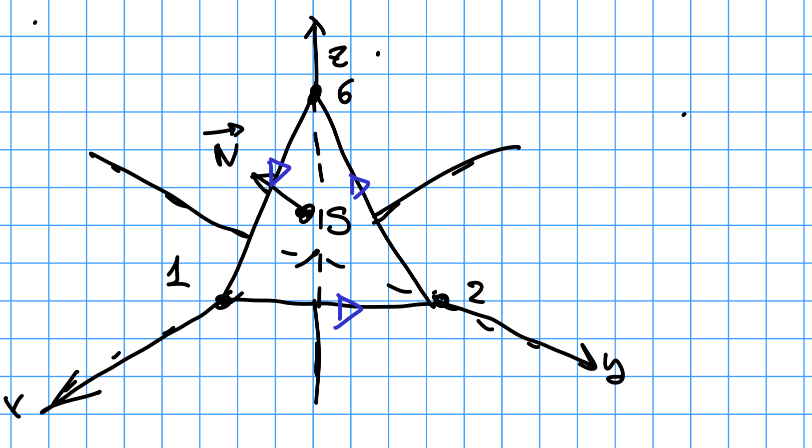
Vediamo che S è una "superficie parametrizzata"

IN EFFETTI se $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$

e $g : T \to \mathbb{R}^3$, $\boxed{g(x,y) := 6 - 6x - 3y} \Rightarrow S =$ grafico di g

$(\Gamma(u,v) = (u, v, g(u,v)))$





VEDIAMO, CON QUESTA PARAMETRIZZAZIONE

$$\Gamma(u,v) = (u, v, 6-6u-3v) \Rightarrow$$

$$\vec{N}_P(u,v) = \begin{bmatrix} -D_u g \\ -D_v g \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{N} \quad (\text{non dipende da } u,v)$$

PUNTA "VERSO FUORI"

(mi allontano dall'origine)

$\Sigma(S) = ??$

$\partial T = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3$ $\quad \ell_1 = \{(u,0) \quad 0 \le u \le 1\}$

$\ell_2 = \{(u,v) \quad u \geq 0, v \geq 0, 2u+v=2\}$

$\ell_3 = \{(0,v) \quad 0 \le v \le 2\}$

$\Sigma(S) = \Gamma(\ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3)$ = tre segmenti tra i punti $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,6)$

Il verso di $\Sigma(S)$ è come nel disegno

IN MODO RIGOROSO $\Sigma(S)$ è descritto da una curva

$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ dove $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ sono

$\gamma_1(t) = (1,0,0) + t(-1,2,0)$ $\quad$ (tra $\underset{t=0}{(1,0,0)}$ e $\underset{t=1}{(0,2,0)}$)

$\gamma_2(t) = (0,2,0) + t(0,-2,6)$ $\quad$ (tra $\underset{t=0}{(0,2,0)}$ e $\underset{t=1}{(0,0,6)}$)

$\gamma_3(t) = (0,0,6) + t(1,0,-6)$ $\quad$ (tra $\underset{t=0}{(0,0,6)}$ e $\underset{t=1}{(1,0,0)}$)

(γ è C^1 a tratti)

Se scambio u e v trovo un'altra rappresentazione di S:

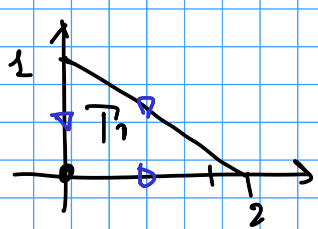
$T_1 = \{(u,v) : u \geq 0, v \geq 0, u + 2v \leq 1\}$ $\qquad g_1(u,v) = 6 - 3u - 6v$

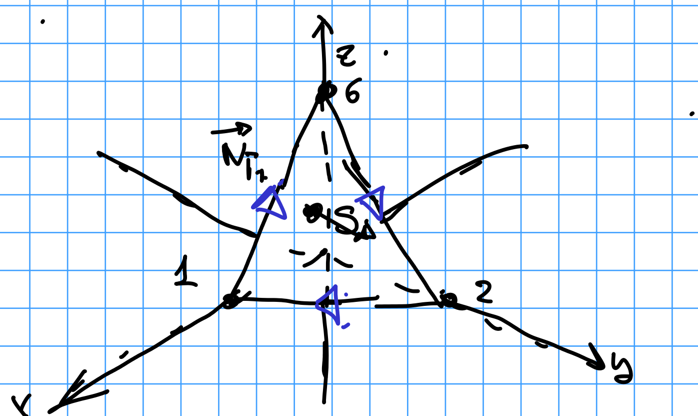
$$\Gamma_1(u,v) = (v, u, g_1(u,v)) \Rightarrow S = \Gamma_1(T_1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ D_u g_1 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ D_v g_1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_{\Gamma_1} = \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v} =$$

$$\det \begin{bmatrix} i & 0 & 1 \\ j & 1 & 0 \\ k & D_u g_1 & D_v g_1 \end{bmatrix} = \vec{i}\, D_v g_1 + \vec{j}\, D_u g - \vec{k} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = -\vec{N}_\Gamma$$





verso opposto al precedente

$$\Gamma_1(0,0) = (0,0,6)$$
$$\Gamma_1(2,0) = (0,2,0)$$
$$\Gamma_1(0,1) = (1,0,0)$$

PASSANDO DA Γ A Γ_1 HO INVERTITO NORMALE E VERSO DEL BORDO.

NON HA SENSO DARE IL VERSO DEL BORDO A S (senza dire altro)

MENTRE $\Sigma(S)$ ha senso dato che non dipende dalla parametrizzazione

CONTINUAZIONE DELLA DEF.

Chiamo SUPERFICIE PARAMETRIZZATA ORIENTATA una coppia $(S, \hat{\nu})$ dove S è una superficie parametrizzata e $\hat{\nu}$ è una funzione

$\hat{\nu}: S \to \mathbb{R}^3$ con $\hat{\nu}$ continua e $\|\hat{\nu}\| = 1$,

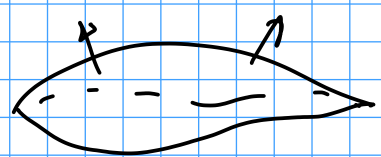
e tale che (IDEA $\hat{\nu}$ è una scelta della normale unitaria)

Esiste una parametrizzazione Γ di S tale che

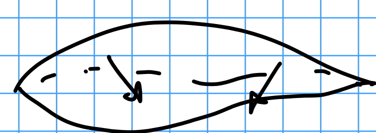
$$\circledast \qquad \frac{\vec{N}_\Gamma(u,v)}{\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|} = \hat{\nu}(\Gamma(u,v))$$

(tra le possibili scelte di Γ ce ne deve essere una con la proprietà $\circledast$)

PER QUANTO DETTO PRIMA, SE D è CONNESSO, OGNI S sup par. dà luogo a due possibili superfici par. orientate

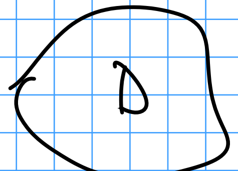


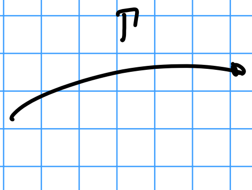
$(S, \hat{\nu})$

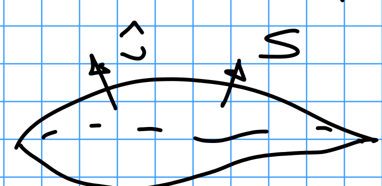


$(S, -\hat{\nu})$

Per vedere se $(S, \hat{\nu})$ è una sup. par. ORIENTATA devo trovare Γ con le proprietà sopra







$$\circledast \qquad \frac{\vec{N}_\Gamma}{\|N_\Gamma\|} = \hat{\nu}$$

Se $(S, \hat{\nu})$ è una sup. par. orientata $\Rightarrow$
posso considerare l'orientamento del bordo $\Sigma(S)$
e cioè posso descrivere $\Sigma(S)$ come

$\bigcup_{i=0}^{k} \tilde{\gamma}_i([a,b])$ dove $\tilde{\gamma}_i = \Gamma(\gamma_i)$ e γ_i

descrivono ∂D coerentemente con D

C'È SOTTO UN TEOREMA: se Γ_1 è un'altra parametrizzazione che verifica ancora $(*)$ $\Rightarrow$
" $\tilde{\gamma}_{i,1}$ hanno lo stesso verso delle $\tilde{\gamma}_i$ "
(le tangenti a $\tilde{\gamma}_{i,1}$ e le tangenti a $\tilde{\gamma}_i$ sono concordi)

Def. Sia S $\subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata.
Se $f: S \to \mathbb{R}$ f continua.

Definisco l'integrale di f su S, che indico con

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_S f(x,y,z) \, d\sigma$$

ponendo

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_D f(\Gamma(u,v)) \underbrace{\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv}_{\text{" elemento d'area "}}$$

$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}$

dove $\Gamma: D \to \mathbb{R}^3$ è una qualunque parametrizzazione di S
(C'È SOTTO UN TEOREMA CHE MI ASSICURA CHE $\iint_S f \, d\sigma$ non dipende dalla Γ che uso per descrivere S)

Definisco $\boxed{\text{l'area di } S}$ come

$$\iint_S 1\, d\sigma = \iint_D \| N_\Gamma(u,v) \| \, du\, dv \qquad \left(\begin{matrix}\text{qualunque } \Gamma \\ \text{parametrizzazione}\end{matrix} \right)$$

ESEMPIO $S =$ calotta $= \{ x^2+y^2+z^2=1 \quad z \geq 0 \}$

① uso la parametrizzazione "tipo grafico"

$$\Gamma(u,v) = (u, v, g(u,v)) \qquad g(u,v) = \sqrt{1-u^2-v^2}$$

$$\Gamma : B \to \mathbb{R}^3 \qquad B = \{ u^2+v^2 \leq 1 \}$$

$$\Rightarrow \quad N_\Gamma = \begin{bmatrix} -D_u g \\ -D_v g \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \| N_\Gamma \| = \sqrt{1+(D_u g)^2 + (D_v g)^2} = \sqrt{1+|\nabla g|^2}$$

Nel nostro caso $D_u g = \dfrac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$ $\quad D_v = \dfrac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$

$$\| N_\Gamma \| = \sqrt{1 + \frac{u^2}{1-u^2-v^2} + \frac{v^2}{1-u^2-v^2}} = \sqrt{\frac{1-u^2-v^2+u^2+v^2}{1-u^2-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \Rightarrow$$

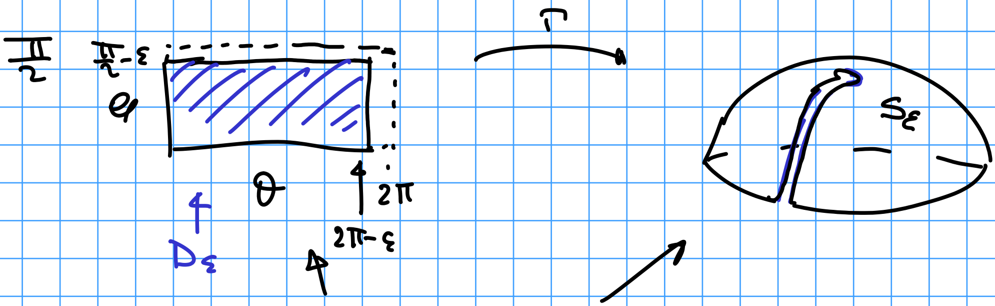
$$\text{Area}(S) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \frac{du\, dv}{\sqrt{1-\underbrace{u^2-v^2}_{\rho^2}}} \qquad \text{coordinate polari}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \, d\rho \, d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \, d\rho = \pi \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s}} =$$

$$\pi \left[2\sqrt{1-s} \right]_0^1 = 2\pi$$

② POSSO ANCHE USARE LE COORDINATE SFERICHE (ANCHE SE NON VERIFICANO TUTTE LE IPOTESI)

IN EFFETTI (discorso qualitativo) "TOLGO UN PEZZETTO"



$$T(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_\Gamma = -\sin\varphi\; T(\theta,\varphi)$$

$$\|\vec{N}_\Gamma\| = \sin\varphi \quad (\geq 0)$$

$\Gamma(D_\varepsilon) = S_\varepsilon$ Se $\varepsilon \to 0$ MI ASPETTO

$$\text{Area}(S_\varepsilon) \longrightarrow \text{Area}(S)$$

$$\iint_D \|N_\Gamma\|\,du\,dv \longleftarrow \iint_{D_\varepsilon} \|\vec{N}_\Gamma\|\,du\,dv = \text{Area}(S_\varepsilon)$$

Questo discorso si può rendere rigoroso $\Rightarrow$

$$\text{Area}(S) = \iint_{\substack{0\leq\theta\leq 2\pi\\ 0\leq\varphi\leq\pi/2}} |\sin\varphi|\,d\theta\,d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,d\varphi = 2\pi\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi/2} = 2\pi$$

MORALE. Per gli integrali le coordinate sferiche funzionano lo stesso per integrare su porzioni della sfera

ESEMPIO CALCOLIAMO

$$\iint_S x^2\,d\sigma \qquad \text{dove } S = \text{calotta di prima}$$

MODO 2 con le coordinate sferiche:

$$\iint_S x^2\,d\sigma = \iint_{\left\{\substack{0\leq\theta\leq 2\pi\\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}}\right.} \underbrace{(\cos\theta\sin\varphi)^2}_{x^2}\,\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi =$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta}_{1} \; \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi \, d\varphi}_{2} = \pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \, d\theta = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3(\varphi) \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\varphi) \sin\varphi \, d\varphi = \int_0^1 (1-s^2) ds = \left[s - \frac{s^3}{3} \right]_0^1$$

$s = \cos\varphi$
$ds = -\sin\varphi \, d\varphi$

$$= \frac{2}{3}$$

<u>MODO 1</u> Usando la parametrizzazione $(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$

$$\iint_S x^2 \, d\sigma = \iint_{u^2+v^2 \le 1} \frac{u^2}{\underbrace{\sqrt{1-u^2-v^2}}_{}} \, du \, dv = \text{coord. polari}$$

$\|\vec{N}_r\|$ come visto prima

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho^2 \cos^2\theta}{\sqrt{1-\rho^2}} \rho \, d\rho = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta}_{= \pi} \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} \rho \, d\rho =$$

$-1 \; +1$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{s}{\sqrt{1-s}} \, ds = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(-\sqrt{1-s} + \frac{1}{\sqrt{1-s}} \right) ds =$$

$$\frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{3}(1-s)^{\frac{3}{2}} - 2(1-s)^{1/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \left(\underbrace{-\frac{2}{3} + 2}_{\frac{4}{3}} \right) = \frac{2}{3}\pi \quad \underline{\underline{\text{TORNA}}}$$