Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 57 26/04/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

SUPERFICI E INTEGRALI DI SUPERFICIE

Def. Chiamiamo "DOMINIO REGOLARE" (CHIUSO) un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^N$ tale che

$$D = \{ x \in \Omega : G(x) \leq 0 \}$$

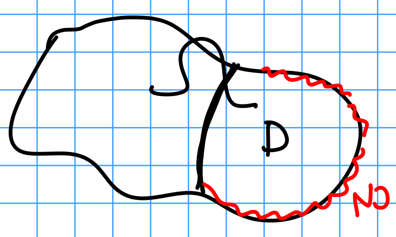
dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto, $G : \Omega \to \mathbb{R}$, G è C^1, $\overline{D} \subset \Omega$ e $\nabla G(x) \neq \vec{0}$ $\forall x \in \Omega$ con $G(x) = 0$

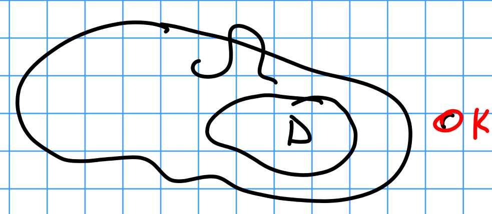
(di solito $\Omega = \mathbb{R}^N$ → NESSUNA IPOTESI) (non chiedo niente sulle x con $G(x) < 0$)

Per esempio $B = \{ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \}$ è un dominio regolare in $\mathbb{R}^3$ con $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ e $\Omega = \mathbb{R}^3$

$$\nabla G = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ se } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \{ G = 0 \}.$$

Dato che $\Omega = \mathbb{R}^N$ è chiaro che $\overline{B} \subset \Omega$





Se D è un dominio regolare $\Rightarrow$ (Segue dal Dini – NO DIM.)

- D è chiuso
- $\partial D = \{x \in \Omega : G(x) = 0\}$ — posto che $\overline{D} \subset \Omega$
- $\mathring{D} = \{x \in \Omega : G(x) < 0\}$

Analogamente dico che W è un dominio regolare aperto se $W = \{x \in \Omega : G(x) < 0\}$ con Ω e G come sopra e devo chiedere che $\overline{W} \subset \Omega$. Di nuovo ho che, se W è regolare (segue da DINI)

- $\partial W = \{x \in \Omega : G(x) = 0\}$
- $\partial W = \{x \in \Omega : G(x) \leq 0\}$

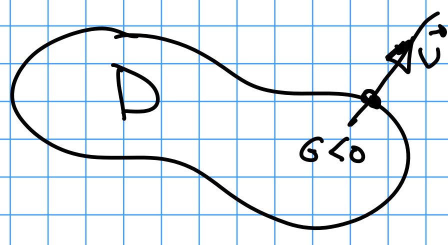
Esempio $\quad W = \{x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$

Se D è un dominio regolare, come detto $\partial D = \{x : G(x) = 0\}$
Nei punti $x \in \partial D$ posso definire la "retta normale" a ∂D in x, ponendo

$$N_{\partial D}(x) = \{\lambda \nabla G(x) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

e in generale se $\vec{\nu} = \lambda \nabla G(x)$ dico che $\vec{\nu}$ è una "normale" a ∂D in x

Se $\lambda > 0$ $\quad \vec{\nu}$ è "uscente da D"



DI SOLITO INDICO CON

$\hat{\nu}$ la normale unitaria uscente, cioè $\hat{\nu} = \dfrac{\nabla G(x)}{\|\nabla G(x)\|}$ ($\neq 0$)

($\|\hat{\nu}\| = 1$!!)

Si può dim. che, se $D = \{x : G(x) \leq 0\} = \{x : G_1(x) \leq 0\}$ (con le proprietà dette sopra) $\Rightarrow \nabla G(x) = \mu \nabla G_1(x)$ con $\mu > 0$

DEF. Dico che D è un dominio (chiuso) regolare a tratti se $\exists\ \Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\exists\ G_1 \cdots G_K : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1

tali

$(*)$ $\left[\begin{array}{l} \forall x \text{ per cui } G_{i_1}(x) = \dots = G_{i_h}(x) = 0 \quad (i_1 \dots i_h \in \{1, \dots, K\}) \\ \Rightarrow \nabla G_{i_1}(x), \dots, \nabla G_{i_h}(x) \text{ sono linearmente indipendenti} \end{array}\right.$

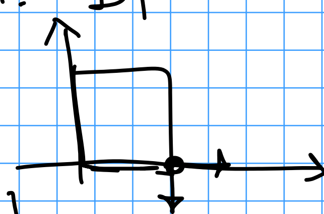
(che si può anche dire: la matrice $\dfrac{\partial(G_{i_1} \cdots G_{i_h})}{\partial(x_1 \cdots x_N)}$ ha rango h)

$$D = \{x \in \Omega : G_1(x) \le 0 \cdots G_K(x) \le 0\}$$

$\overline{D} \subset \Omega$ (se Ω è tutto $\mathbb{R}^N$ questa ipotesi non c'è)

IN ALTRI TERMINI D è regolare a tratti se esistono $D_1 \cdots D_K$ regolari e $D = D_1 \cap \dots \cap D_K$, tali che valga $(*)$ (devono intersecarsi bene!)

(SONO DEI VINCOLI UNILATERI DI CODIM. 1)



Esempio: $Q = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

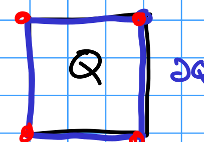
$Q : \{(x, y) : -x \le 0,\ x - 1 \le 0,\ -y \le 0,\ y - 1 \le 0\}$

Nel caso di un vincolo regolare a tratti si ha. (sempre Dini)

- D è chiuso
- $\partial D = \bigcup_{i=1}^{K} \{x \in D : G_i(x) = 0\}$ $\leftarrow$
- $\mathring{D} = \{x \in \Omega : G_i(x) < 0\ \forall i\} = \bigcap \mathring{D}_i$

$D_i = \{G_i \le 0\}$

$\mathring{D}_i = \{G_i < 0\}$



Nel caso del quadrato sopra $\Rightarrow$ $(P = (x, y))$

$$\partial Q = \{P \in Q : x = 0\} \cup \{P \in Q : x = 1\} \cup \{P \in Q : y = 0\} \cup \{P \in Q : y = 1\}$$

Possiamo suddividere i punti di frontiera in due categorie

$x \in \partial D$ dico che x è di "<u>frontiera regolare</u>" ($x \in \partial_r D$)

se c'è una sola G_i tale che $G_i(x) = 0$ (mentre $G_j(x) < 0$ $\forall i \neq j$)

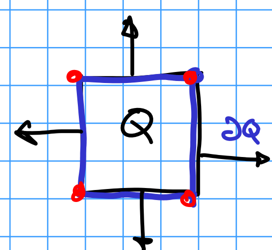
le altre x si dicono di "frontiera singolare" ($x \in \partial_s D$)

$$\partial D = \partial_r D \cup \partial_s D$$

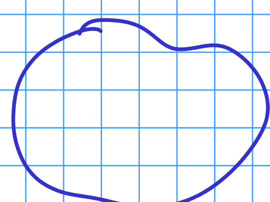
Se $x \in \partial_r D \Rightarrow$ è ben definita la <u>retta normale</u>

$$N_{\partial D}(x) = \{ \lambda \nabla G_i(x) \quad \lambda \in \mathbb{R} \} \qquad \hat{\nu} = \frac{\nabla G_i}{\|\nabla G_i\|}$$

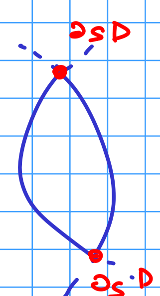
quella i per cui $G_i(x) = 0$, $G_j(x) < 0$ $\forall i \neq j$



Nei vertici NON SI DEFINISCE la normale



DOMINIO REGOLARE $\partial_r D = \partial D$



DOM. REG. A TRATTI

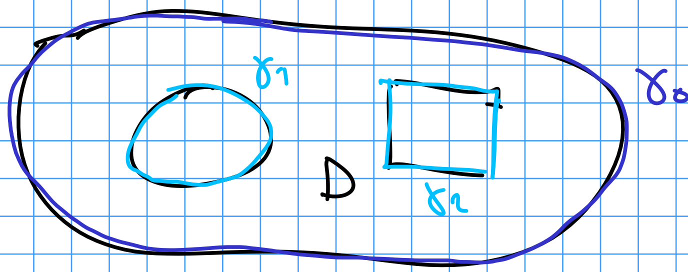
c'è $\partial_s D$

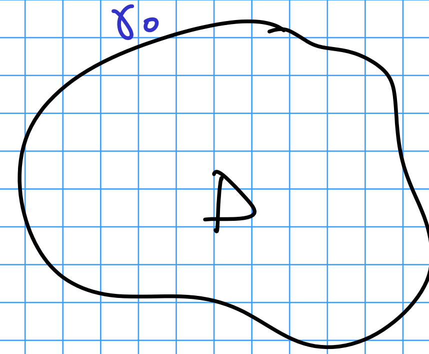
<u>Mettiamoci in $\mathbb{R}^2$</u> Consideriamo $D \subset \mathbb{R}^2$, D dominio regolare a tratti $\boxed{\text{LIMITATO}}$ SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

esistono $K+1$ curve $\gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_K : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

γ_i C^1 a tratti tali che

$$\partial D = \bigcup_{i=1}^{k} \gamma_i([a,b]) = \bigcup_{i=1}^{k} \{ \gamma_i(t) \, , \ a \le t \le b \}$$



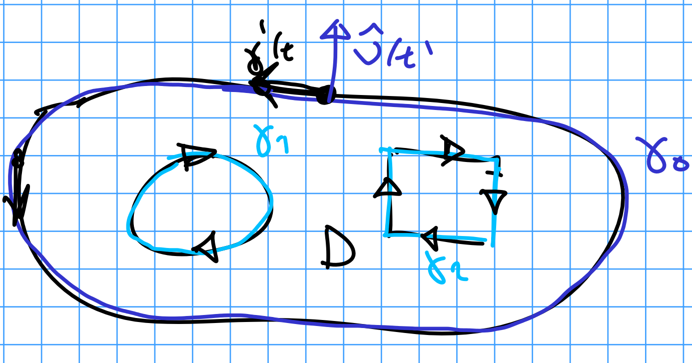


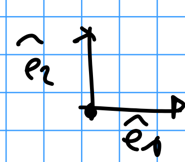
Conveniamo che γ_0 sia quella che descrive il bordo della parte illimitata di $\mathbb{R}^2 \setminus D$ (c'è sotto un grosso teorema: se D è limitato $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2 \setminus D$ può avere vari pezzi: uno di questi è illimitato)

regolare a tratti ($\mathbb{R}^2 \setminus (0)$ NON lo è)

NOTA Si può dim. che D è semplicemente connesso $\Leftrightarrow$ ∂D è fatto da una sola curva chiusa

Def. Dato D e date delle curve $\gamma_0 \dots \gamma_k$ come sopra dico che le γ_i "hanno verso coerente con D" se "quando t cresce D si trova a sinistra di γ_i"



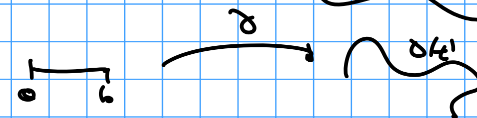


(si potrebbe formalizzare dicendo che $\forall i$ la coppia di vettori $\left(\hat{\nu}(\gamma(t)), \gamma_i'(t) \right)$ sono ottenibili dalla coppia $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$

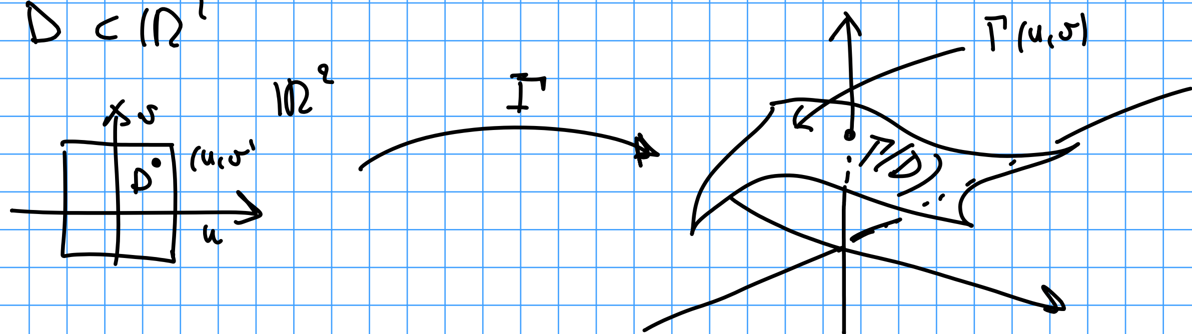
con una rotazione)

HO DEFINITO UN "VERSO CANONICO" per le curve che descrivono $\partial D \subset \underline{\underline{\mathbb{R}^2}}$.

SUPERFICI IN $\mathbb{R}^3$



<u>IDEA</u>: similmente a quello che si fa per le curve ($[0,b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n$) si vuole definire una superficie (di dimensione due) in $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^n$) come il risultato di una mappa: $\Gamma : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dove $D \subset \mathbb{R}^2$



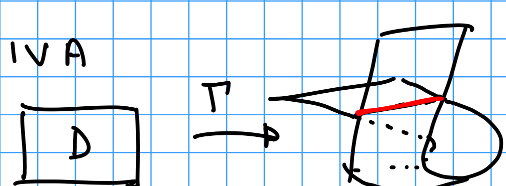
(questa idea va bene come punto di partenza, ma va ampliata)

<u>DEF.</u> Sia D un dominio regolare stretti di $\mathbb{R}^2$. Sia

$\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ una funzione di classe $C^1(\mathring{D})$ e $C^0(D)$

Dico che Γ è una <u>superficie parametrica</u> se:

(a) $\Gamma = \Gamma(u,v)$ è INIETTIVA

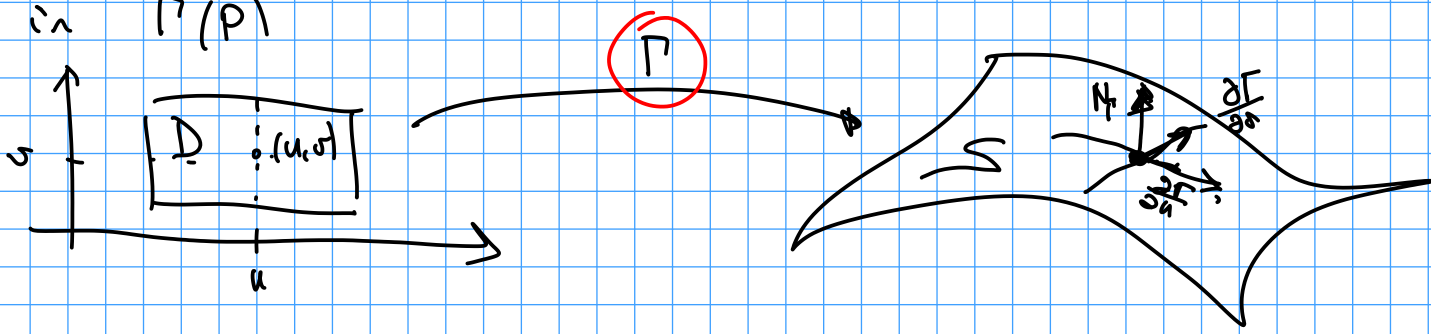


(b) $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial u}(P)$ e $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial v}(P)$ sono linearmente indipendenti $\forall P \in \mathring{D}$

La (b) la posso anche scrivere dicendo che

$$N_\Gamma(P) := \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(P) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(P) \neq \vec{0} \qquad \forall P \in \mathring{D}$$

$0 \neq N_\Gamma(P)$ rappresenta la normale alla superficie in $\Gamma(P)$



mentre i due vettori $\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(P)$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}(P)$ generano il piano tangente

$$T_\Gamma(P) = \left\{ \lambda \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(P) + \mu \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(P) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

è il piano tangente nel punto $\Gamma(P)$

$\{ \lambda N_\Gamma(P) \,,\ \lambda \in \mathbb{R} \}$ è la retta normale

Dico anche che: $S = \{ \Gamma(P) \quad P \in D \} \subset \mathbb{R}^3$ è il SOSTEGNO di Γ #

ESEMPIO (MEZZA SFERA)

$$D = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1 \}$$

D è un dominio regolare in $\mathbb{R}^2$

$$\Gamma(u,v) = \Big(u, v, \underbrace{\sqrt{1-u^2-v^2}}_{g(u,v)} \Big)$$

g è continua su D, C^1 su $\mathring{D} = \{ u^2+v^2 < 1 \}$ e

$$\frac{\partial}{\partial u} g(u,v) = \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \qquad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix}$$

(a) Γ è INIETTIVA:

$$\Gamma(u_1,v_1) = \Gamma(u_2,v_2) \Leftrightarrow (u_1, v_1, g(u_1,v_1)) = (u_2, v_2, g(u_2,v_2)) \Leftrightarrow$$

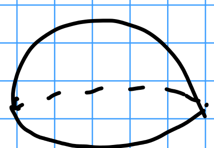
$$u_1 = u_2 \,, \quad v_1 = v_2$$

(b)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \approx \det \begin{bmatrix} \vec{i} & 1 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 1 \\ k & D_u g & D_v g \end{bmatrix} =$$

$$\vec{i}\,(-D_u g) - \vec{j}\,(D_v g) + \vec{k} \cdot 1 = \begin{bmatrix} -D_u g \\ -D_v g \\ \underbrace{1}_{\neq 0} \end{bmatrix} \neq \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Γ è una superficie parametrica



QUESTA SUPERFICIE È UN GRAFICO

Def. Dico che Γ è il grafico di una $g : D \to \mathbb{R}$

($D \subset \mathbb{R}^2$ reg. e limit., $g \in C^0(D)$ e $g \in C^1(D^\circ)$) se

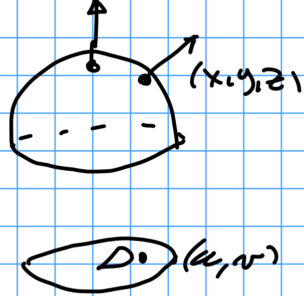
$$\Gamma(u,v) = (u, v, g(u,v))$$

I conti sopra mostrano che Γ è una superficie parametrica.

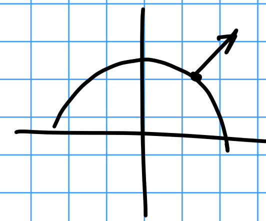
TORNANDO ALLA MEZZA SFERA. Ho trovato

$$N_\Gamma(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{retta normale} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix} \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$\{u^2+v^2 \le 1\}$



(x



SI PUÒ ANCHE SCRIVERE

$$N_\Gamma(x,y,z) = N_\Gamma(u,v) \quad \text{dove} \quad (x,y,z)=\Gamma(u,v)$$

$$N_\Gamma(0,0,1) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ (al polo nord!!)

$$(0,0,1) = \Gamma(0,0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \Gamma\Big(\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{3}}}_{=u},\ \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{3}}}_{=v}\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$N\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = 1$$

Mentre, in $P=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ il piano tangente è generato dai due vettori $\begin{bmatrix}1\\0\\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\1\\ \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\end{bmatrix}$ cioè

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$\Gamma_p(P) = \{ (\lambda, \mu, -\lambda-\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

VORREI CHIAMARE SUPERFICIE L'INSIEME $S \subset \mathbb{R}$ e non la $\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ (con $S = \Gamma(D)$)

<u>DEF.</u> Sia $S \subset \mathbb{R}^3$. Dico che S è una "superficie parametrizzata" se esiste $D \subset \mathbb{R}^2$ regolare e limitato e $\Gamma : D \to \mathbb{R}$ con le proprietà scritte sopra e tale che $\Gamma(D) = S$

S è una superficie parametrizzata se S è sostegno di una superficie parametrica

In questo caso dico che Γ è una "parametrizzazione" di S

Nell'esempio di prima $S = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 1 , z \geq 0 \}$ e $\Gamma(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$ è una parametrizzazione di S.

<u>OSSERVIAMO</u> che S si può parametrizzare in altri modi.
PER ESEMPIO posso considerare (le "coordinate sferiche")

$$\Gamma_1(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi , \sin\theta \sin\varphi , \cos\varphi)$$
$$D_1 = \{ (\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi , 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \}$$

MA PURTROPPO questa Γ_1 NON SODDISFA LA (3) dato che non è iniettiva: $\theta = 0$ $\theta = 2\pi \to$ stesso risultato

LE COORD. SFERICHE NON VERIFICANO LE IPOTESI SE MI METTO con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (e poi c'è anche $\varphi = 0$ ...)

FACCIAMO FINTA DI NIENTE E VEDIAMO CHE COSA CI DAREBBERO LE COORD SFERICHE

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$N_{\Gamma_1}(\theta, \varphi) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & -\sin\theta \sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \vec{j} & \cos\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi \\ \vec{k} & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$\sin\varphi \det \begin{bmatrix} \vec{i} & -\sin\theta & \cos\theta\cos\varphi \\ \vec{j} & \cos\theta & \sin\theta\cos\varphi \\ \vec{k} & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$-\sin\varphi \left(\vec{i} \quad \cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} \cos\varphi \right) =$$

$$= -\sin\varphi \, \Gamma(\theta, \varphi) \qquad (\neq 0 \text{ se } \varphi \neq 0, \text{ Punto} \neq \text{polo nord})$$

SI NOTA CHE se $P \in S$ e $P \neq (0,0,1)$

$$\Gamma(u,v) = P = \Gamma_1(\theta, \varphi)$$

si vede che $\{\lambda N_\Gamma(P)\} = \{\lambda N_{\Gamma_1}(P)\}$

CONTINUIAMO DOMANI