Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 56   21/04/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

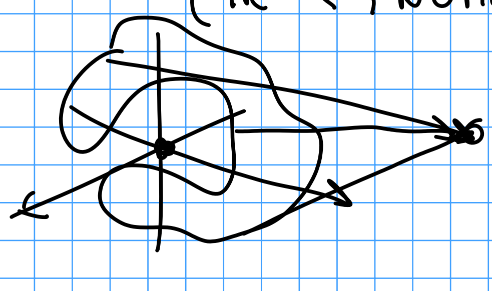
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

- Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è semplicemente connesso $\Rightarrow$ ogni $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ irrotazionale è anche conservativo.

- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è sempl. conn. (

FATTO $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ È SEMPLICEMENTE CONNESSO

($\mathbb{R}^3 \setminus \{$NUMERO FINITO DI PUNTI$\}$)



$\forall$ curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ si può deformare a un punto senza passare per $(0,0,0)$

(non è immediato!

ESEMPIO

$$\vec{f}(x,y,z) = \frac{-2xy\,\vec{i} + (x^2 - y^2 + z^2)\,\vec{j} - 2yz\,\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

VEDIAMO SE $\vec{f}$ è irrotazionale: devo calcolare 6 derivate parziali

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-2x(x^2+y^2+z^2)^{\cancel{2}} + 2xy\, 2\cancel{(x^2+y^2+z^2)}\, 2y}{(x^2+y^2+z^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-2x^3 - 2xy^2 - 2xz^2 + 8xy^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{-x^2+3y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,2x$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -(2xy)\frac{-2\cancel{(x^2+y^2+z^2)}\,2z}{(x^2+y^2+z^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{8xyz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{(x^2-y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{2x(x^2+y^2+z^2)^{\cancel{2}} - (x^2-y^2+z^2)\,2\cancel{(x^2+y^2+z^2)}\,2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\cancel{4}}} =$$

$$\frac{2x^3+2xy^2+2xz^2-4x^3+4xy^2-4xz^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{-x^2+3y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,2x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{(x^2-y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \dots = \frac{-x^2+3y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,2z$$ (basta scambiare x e z)

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} = -2yz\,\frac{2(x^2+y^2+z^2)\,2x}{(x^2+y^2+z^2)^4} = \frac{8xyz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \dots = \frac{-x^2+3y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,2z$$

- IL CAMPO È IRROTAZIONALE.
- DATO $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ è SEMPL. CONN.

$\Rightarrow$ IL CAMPO È CONSERVATIVO

Proviamo a trovare un potenziale F. Deve essere

(A) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ (B) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

(C) $\dfrac{\partial F}{\partial z} = -\dfrac{2zy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

(A) $\quad F = \int \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dx = y\int \frac{-2x\,dx}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dx$

sostituisco $x^2+y^2+z^2 = w \Rightarrow dw = 2x\,dx$

$$= y\int \frac{-dw}{w^2} = y\,\frac{1}{w} = \frac{y}{x^2+y^2+z^2} + c(y,z)$$

$$F(x,y,z) = \frac{y}{x^2+y^2+z^2} + c(y,z) \quad \left(= c(y) \right)$$

USO LA (C):

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)} + \frac{\partial c}{\partial z}(y,z)$$

se impongo (c) $\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \Rightarrow c(y,z) = c(y)$

DERIVIAMO IN y $\Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2+z^2) - y\,2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} + c'(y) = \frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + c'(y)$$

dalla (B) $\Rightarrow$ $c' = 0$ cioè

$$F(x,y,z) = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)} + \text{cost}$$

DOMANI ALLE 17.00 RICEVIMENTO

$$(4-x^2)y'' + x\,y' + 8y = 0$$

Se faccio i soliti calcoli cercando $y(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$

$$y' = \sum_{0}^{\infty} a_n n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{0} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big(4(n+2)(n+1)a_{n+2} \underbrace{- n(n-1)a_n + n a_n + 8 a_n}_{-n^2+n+n+8} \Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(4(n+2)(n+1)a_{n+2} - (\underbrace{n^2-2n-8}_{(n+2)(n-4)}) a_n \Big) x^n =$$

$$n_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underset{\neq 0}{(n+2)} \Big(4 \underset{\neq 0}{(n+1)} a_{n+2} - (n-4) a_n \Big) x^n$$

(R) $$\boxed{a_{n+2} = \frac{(n-4)}{n+1} a_n}$$

"di ordine due", $\underline{\underline{\text{manca } a_{n+1}}}$

a_{2k+2} si trova a partire da a_{2k}

a_{2k+3} " " " " a_{2k+1}

Potrei definire $b_k = a_{2k+1}$ $c_k = a_{2k}$ ALLORA

$$b_{k+1} = a_{2k+3} = a_{2k+1+2} = \frac{2k+1-4}{2k+1+1} a_{2k+1} = \left(\frac{2k-3}{2k+2}\right) b_k$$

(R, dispari) $$b_{k+1} = \frac{2k-3}{2k+2} b_k$$

$$c_{k+1} = a_{2k+2} = \frac{2k-4}{2k+1} a_{2k} = \frac{2(k-2)}{2k+1} c_k$$

(R, pari) $$\boxed{c_{k+1} = \frac{2(k-2)}{2k+1} c_k}$$

$k=1$

$c_2 = \frac{-2}{3}$ -4

posso scrivere $$y(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1}}_{y_d(x)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}}_{y_p(x)}$$

Dalla relazione sui pari $\Rightarrow$ $k=2 \Rightarrow c_3 = 0$

$$\Rightarrow c_m = 0 \ \forall m \geq 3 \ \left(a_{2m} = 0 \ \forall m \geq 3, \ 0 = a_6 = a_8 = \dots \right)$$

Mentre i dispari ci sono tutti se $a_1 \neq 0$ $(a_1 = b_0)$

Se parto da $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
$b_0 = 1$ $c_0 = 1$

$\Rightarrow$

Se guardo i pari $\Rightarrow$ $c_0 = 1$ $c_1 = -4$ $c_2 = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow$ $y_p(x) = 1 - 4x^2 + \frac{8}{3}x^4$

Se guardo i dispari $y_d(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1}$

con $b_k \neq 0$ $\forall k$

QUAL E' IL RAGGIO DI CONV. di $y(x)$

= RAGGIO DI CONV. DI $y_d(x)$

Per calcolarlo conviene definire

$$g(y) = \sum b_k y^k$$

questo ha raggio $R = \frac{1}{L}$ dove $L = \lim \sqrt[k]{b_k}$

$$= \lim \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim \frac{2k-3}{2k+2} = 1 \qquad R = 1$$

tutti $\neq 0$

$\Rightarrow g(y)$ converge se $|y| < 1$

$$\Rightarrow y_d(x) = \sum b_k x^{2k+1} = x \sum b_k x^{2k} = x \sum b_k (x^2)^k$$

$= x\, g(x^2)$ CONVERGE se $|x^2| < 1 \iff |x| < 1$

MA se avessi avuto che il raggio di $\sum b_k y^k$
$= R$ $\Rightarrow$ avrei trovato

$$y_d(x) = x\, g(x^2) \Rightarrow x^2 < R \iff \boxed{|x| \leq \sqrt{R}}$$

Campo radiale

$$\vec{f} = 2\psi(\|x\|^2)\, x = 2\varphi(\|x\|)(x_1 \dots x_N)$$

integro ψ e trovo Ψ con $\Psi' = \psi$ e allora
$F = \Psi(\|x\|^2)$

oppure, se $\vec{f} = \varphi(\|x\|) \dfrac{x}{\|x\|}$

trovo Φ con $\Phi' = \varphi$ e $F(x) = \Phi(\|x\|)$

(infatti $\nabla F(x) = \Phi'(\|x\|) \cdot \nabla\|x\| = \varphi(\|x\|) \dfrac{x}{\|x\|}$

Per esempio $\vec{f} \quad \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2+y^2)^2}$ posso vederlo

(1)
$$\vec{f} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\|x\|^2)^2} \left(2x\vec{i} + 2y\vec{j} \right)$$

qui ho $\psi(r) = \dfrac{1}{2r^2}$ $\quad \Psi(r) = -\dfrac{1}{2r}$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{-1}{2(x^2+y^2)}$$

(2)
$$\vec{f} = \frac{1}{\|P\|^3} \left(\frac{x}{\|P\|}\vec{i} + \frac{y}{\|P\|}\vec{j} \right)$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^3} = r^{-3}; \quad \Phi(r) = \frac{r^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2r^2}$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{-1}{2x^2+y^2}$$