Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 55 20/04/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ Ω aperto di $\mathbb{R}^N$

$\vec{f}$ è IRROTAZIONALE se $\vec{f}$ è C^1 e $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$

IN $\mathbb{R}^3 \iff \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial y}$

IN $\mathbb{R}^2 \iff \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$

VISTO CHE

- $\vec{f}$ CONSERVATIVO $\Rightarrow$ $\vec{f}$ IRROTAZIONALE
  $\not\Leftarrow$
- Se $x_0 \in \Omega$ e Ω è STELLATO RISPETTO A x_0 $\Rightarrow$ ogni campo irrotazionale su Ω è conservativo su Ω.

anche questa NON è REVERSIBILE

se Ω non è stellato possono comunque esserci campi conservativi su Ω. Per esempio $\boxed{\vec{f}(x,y)} = \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$

è un campo definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} =: \Omega$ CHE NON È STELLATO

(infatti in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ci sono irrotazionali non conservativi:
esempio $\dfrac{-y}{x^2+y^2} i + \dfrac{x}{x^2+y^2}$) PERO' il campo scritto sopra

è conservativo, in quanto è radiale $\vec{f}(x,y) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\|(x,y)\|^2}$

e come tale ammette come potenziale $F(x,y) = \dfrac{-1}{\|(x,y)\|}$,

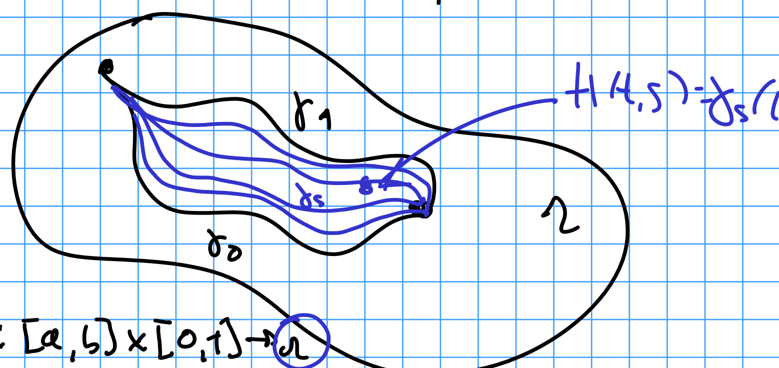
---

IN REALTÀ l'ipotesi Ω stellato non è la più generale per avere $\vec{f}$ irrotazionale $\Rightarrow$ $\vec{f}$ conservativo.

IPOTESI GIUSTA: Ω SEMPLICEMENTE CONNESSO

Def. Date due curve γ_0 e $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$

Tali che γ_1 e γ_2 hanno gli stessi estremi, cioè $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$



Dico che γ_0 e γ_1 sono OMOTOPE ("a estremi fissi")

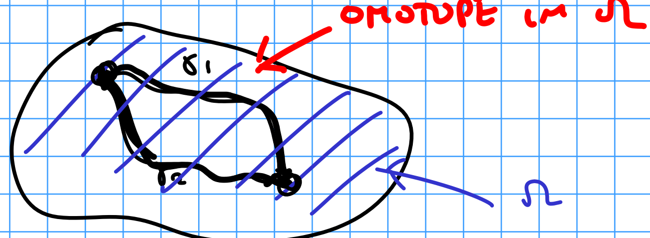
se esiste una funzione $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$

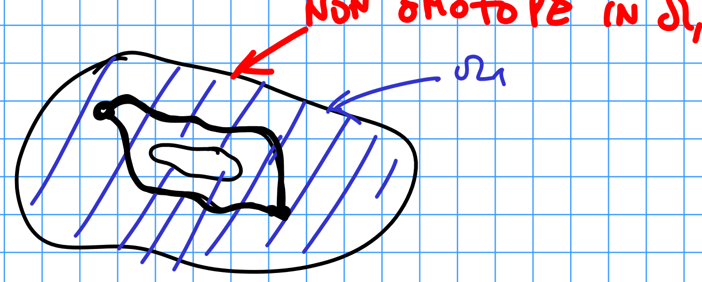
$(H = H(t,s)$ con $t \in [a,b]$, $s \in [0,1])$, con

- H continua rispetto a (t,s)
- $\forall\, s \in [0,1]$ $\quad H(a,s) = H(0,s)$, $H(b,s) = H(0,s)$
- $\forall\, t \in [a,b]$ $\quad H(t,0) = \gamma_0(t)$ $\quad H(t,1) = \gamma_1(t)$

(posso pensare ad $H(t,s)$ come una famiglia di curve $\gamma_s(t) = H(t,s)$; dunque $\gamma_s(a) = \gamma_0(a)$ $\gamma_s(b) = \gamma_0(b)$ $\forall s$)

$\simeq$ Posso deformare, con un movimento continuo, γ_0 in γ senza uscire mai da Ω



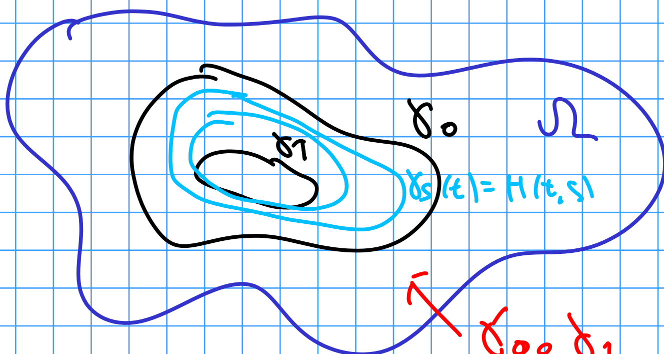


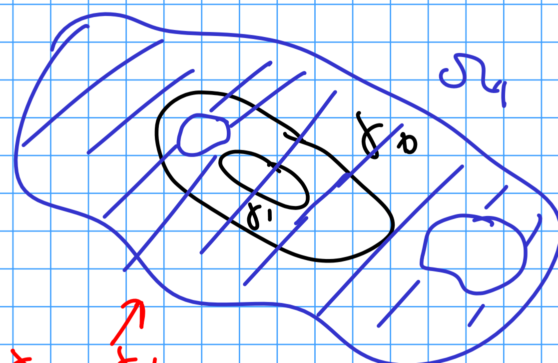
• Dato $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ · curve chiuse $(\gamma_i(b) = \gamma_i(a))$ $i=1,2$

dico che γ_0 e γ_1 sono omotope "come curve chiuse" in Ω

se $\exists\ H : \overset{t}{[0,b]} \times \overset{s}{[0,1]} \to \underline{\underline{\Omega}}$ tali che

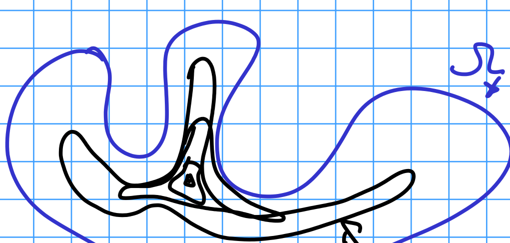
- $H(t,s)$ è continua in (t,s)
- $\forall\, s \in [0,1]$ $\quad H(0,s) = H(b,s)$
- $\forall\, t \in [0,b]$ $\quad H(t,0) = \gamma_0(t)$, $H(t,1) = \gamma_1$





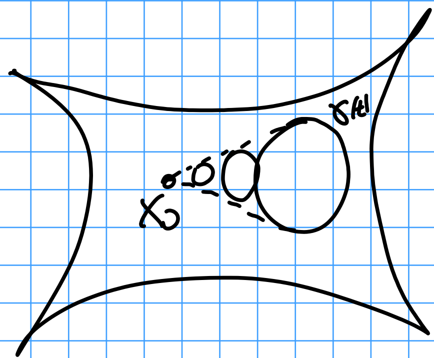
Def. Dico che Ω è semplicemente connesso se $\boxed{\Omega \text{ è CONNESSO e}}$ OGNI CURVA CHIUSA IN Ω è omotopa a una curva COSTANTE

Questo intuitivamente vuole dire che "Ω non ha buchi"



OSS. Se Ω è stellato $\Rightarrow$ Ω è semplicemente connesso

Infatti se $\gamma : [a,b] \to \Omega$ è una curva chiusa posso definire



$$H(t,s) = x_0 + s\,(\gamma(t) - x_0)$$

- H è continua
- $H(a,s) = x_0 + s(\gamma(a) - x_0)$
  $H(b,s) = x_0 + s(\gamma(b) - x_0)$ sono uguali
- $H(t,1) = \gamma(t)$
  $H(t,0) = x_0 \leftarrow$ curva costante

TEOREMA Supponiamo che Ω sia un aperto $\subseteq \mathbb{R}^N$ e che $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ sia un campo (C^1) irrotazionale.
Se γ_1 e γ_2 sono due curve in Ω aventi gli stessi estremi / $\gamma_1\ \gamma_2$ chiuse. Se γ_1 è omotopa a γ_2 $\Rightarrow$

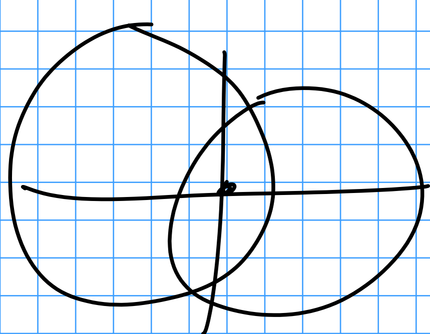
$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f}\, ds$$

$$\vec{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} =: \Omega^*$$

Per esempio se considero il campo $\vec{f}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}$

(abbiamo visto che $\vec{f}$ è irrotazionale, ma non conservativo su Ω^*)

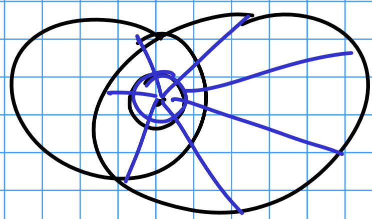
Possiamo dire che su tutte le circonferenze γ di Ω ... "allacciano" l'origine



(più precisamente su tutte le circonferenze che son frontiera di un cerchio contenente l'origine), e girano in senso antiorario

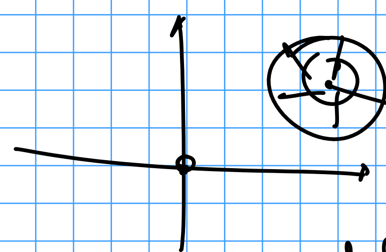
$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2$$

Questo segue dal fatto che tutte queste circonferenze sono omotope tra loro (lo si vede)



INVECE su ogni circonferenza γ che "non allaccia" l'origine

$$\Rightarrow \quad \oint_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$



infatti queste circonferenze si possono deformare al centro senza mai passare da $(0,0)$. Uso che $\oint_{\gamma_0} \vec{f}\, d\vec{s} = 0$ se γ_0 è una curva costante

---

CONSEGUENZA Se Ω è semplicemente connesso $\Rightarrow$ ogni campo irrotazionale su Ω è conservativo

(perché ogni curva chiusa γ è omotopa a una costante γ_0
$\Rightarrow$ su ogni γ $\quad \oint_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} = \oint_{\gamma_0} \vec{f}\, d\vec{s} = 0$)

. RIBADISCO CHE SE ho un campo $\vec{f}$ IRROTAZIONALE e vedo che il dominio non è semplicemente connesso NON deduco che $\vec{f}$ non è conservativo

Se Ω non è s.c. devo guardare caso per caso.

OSS. Da quanto detto posso dedurre che $\Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso. Infatti ho trovato un campo irrotazionale non conservativo.

ESEMPIO $\vec{f} : \Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definito da

$$\vec{f}(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\vec{i} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\vec{j}$$

VEDIAMO se $\vec{f}$ è irrotazionale. Devo calcolare

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2y(x^2+y^2)^{\cancel{2}} - (x^2-y^2)\,2\cancel{(x^2+y^2)}\,2y}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$\frac{-2y}{(x^2+y^2)^3}\left(x^2+y^2+2x^2-2y^2\right) = \frac{-2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} = 2y\,\frac{(x^2+y^2)^{\cancel{2}} - x\,2\cancel{(x^2+y^2)}\,2x}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2y(x^2+y^2-4x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$\vec{f}$ È IRROTAZIONALE !!

PAUSA $\longrightarrow$ 10.38

MI CHIEDO se $\vec{f}$ è conservativo. NON POSSO USARE IL TEOREMA SCRITTO SOPRA, perché Ω^* non è S.C.

Posso provare a calcolare $\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s}$ su una circonferenza centrata nell'origine:

$(R>0)$ $\quad \gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\quad \gamma(t) := R\left(\cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j}\right)$

$$\dot{\gamma}(t) = R\left(-\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}\right)$$

(se trovo $\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} \neq 0 \Rightarrow \vec{f}$ non è conservativo; se trovo zero... vediamo)

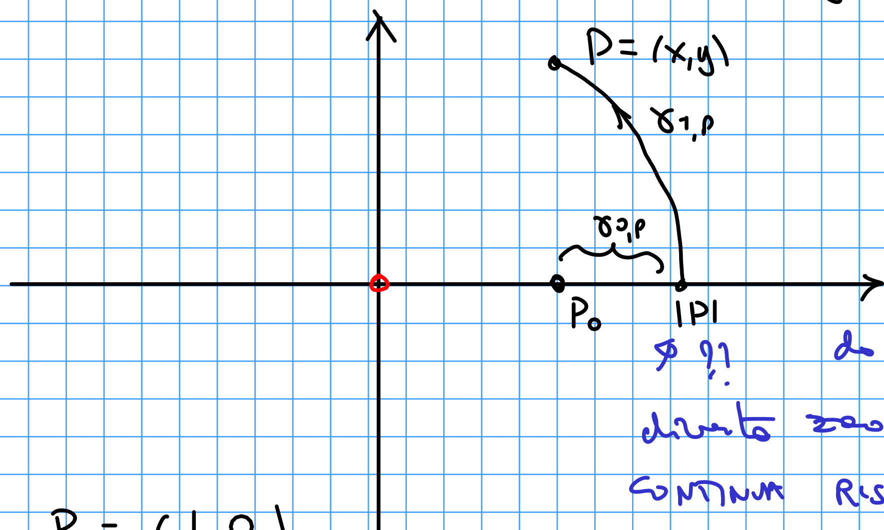
$$\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(R\cos(t), R\sin(t)) \cdot R\left(-\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}\right) dt =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^2\cos^2(t) - R^2\sin^2(t)}{R^4}\,\vec{i} + \frac{2R^2\cos(t)\sin(t)}{R^4}\,\vec{j}\right)\cdot\left(-R\sin(t)\,\vec{i} + R\cos(t)\,\vec{j}\right)dt$$

$$\frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\left(\left(\underbrace{-\cos^2(t)+\sin^2(t)}_{1-2\cos^2(t)}\right)\sin(t)+2\cos^2(t)\sin(t)\right)dt =$$

$$\frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\sin(t)\,dt = 0$$

DUNQUE SU OGNI CIRCONFERENZA γ $\quad \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$



$\emptyset$?? da P un giro $\int_{\gamma_P}\vec{f}\cdot d\vec{s}$ diventa zero $\Rightarrow \int_{\gamma_P}\vec{f}\cdot d\vec{s}$ è CONTINUA RISPETTO a P

FISSO $P_0=(1,0)$

Dato un generico $P=(x,y)$ costruisco una curva γ_P che congiunge P_0 e P. $\gamma_P=\gamma_{0,P}\cup\gamma_{1,P}$

VOGLIO CALCOLARE $\int_{\gamma_P}\vec{f}\cdot ds$. $\Leftarrow$ È CONTINUA SU $\mathbb{R}^2$ perchè "quando θ fa un giro"

$\gamma_{0,P}$ è il segmento tra P_0 e $(|P|,0)$

$\gamma_{1,P}$ è l'arco di cerchio tra $(|P|,0)$ e P, che gira in verso antiorario

Calcoliamo $\quad ① = \int_{\gamma_{0,P}}\vec{f}\cdot d\vec{s} \quad$ e $\quad ② = \int_{\gamma_{1,P}}\vec{f}\cdot d\vec{s}$

$$① = \int_1^{|P|}\vec{f_1}(t,0)\cdot dt \qquad \left(\begin{array}{l}\gamma_{0,P}(t)=(t,0) \text{ dove } x\in[1,|P|]\\ \dot{\gamma}_{0,P}(x)=(1,0)=\vec{i}\end{array}\right)$$

$$=\int_1^{|P|}\frac{t^2-0^2}{(t^2+0^2)^2}\,dt = \int_1^{|P|}\frac{dt}{t^2} =$$

$$\left[-\frac{1}{t}\right]_1^{|P|} = 1-\frac{1}{|P|} = 1-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

② $\gamma_{2,P}(t) = |P|\left(\cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j}\right) \qquad 0 \le t \le \operatorname{Arg}(P)$

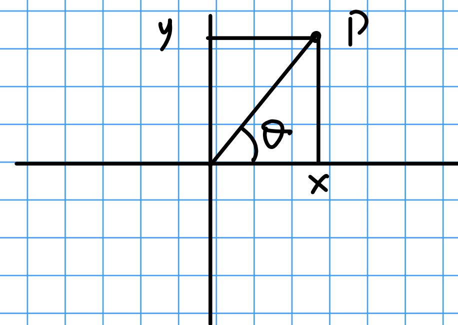
$\operatorname{Arg}(P) \in [0, 2\pi[$

Con gli stessi calcoli fatti sopra:

$$\int_{\gamma_{2,P}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{|P|} \int_0^{\operatorname{Arg}(P)} \sin(t)\,dt = \frac{1}{|P|}\Big[-\cos(t)\Big]_0^{\operatorname{Arg}(P)} =$$

$$\frac{1}{|P|}\left(-\cos(\operatorname{Arg}(P)) + 1\right) =$$

$$\frac{1}{|P|}\left(1 - \frac{x}{|P|}\right)$$



$\theta = \operatorname{Arg}(P) \Rightarrow$

$P = (\overbrace{|P|\cos(\theta)}^{x}, |P|\sin\theta)$

$\Rightarrow \cos(\theta) = x/|P|$

$\Downarrow$

$$\int_{\gamma_P} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{-1}{|P|} + \frac{1}{|P|} - \frac{x}{|P|^2} = \boxed{\frac{-x}{x^2+y^2} =: F(x,y)}$$

Verifichiamo che F è un potenziale per $\vec{f}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{x^2+y^2} = \frac{-(x^2+y^2)+x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = f_1(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{-x}{x^2+y^2} = -x\,\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = f_2(x,y)$$

TORNA

QUESTO SISTEMA È GENERALE SU $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

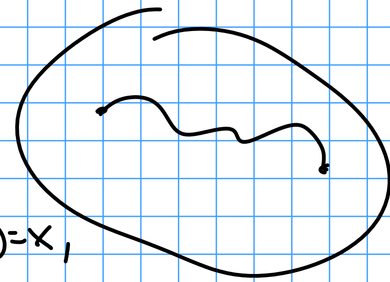
SE SU UNA CIRCONFERENZA γ di raggio $R>0$ $\oint \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$, e $\vec{f}$ è IRROTAZIONALE

$\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo e il potenziale si costruisce così

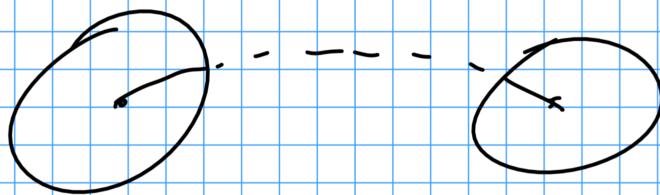
Ω connesso (per archi)

dati x_0 e x_1 in Ω esiste

$\gamma : [a,b] \to \Omega$ con $\gamma(a) = x_0$ $\gamma(b) = x_1$



← CONNESSO

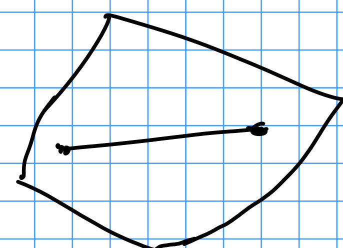


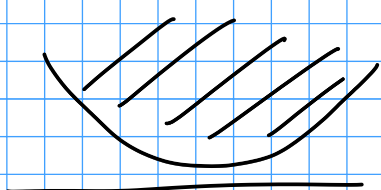
NON CONNESSO

Ω si convesso se dati x_0 e x_1 in Ω ; allora

$x_0 + t(x_1 - x_0) \in \Omega \quad \forall\, t \in [0,1]$

(Ω contiene il segmento tra x_0 e x_1

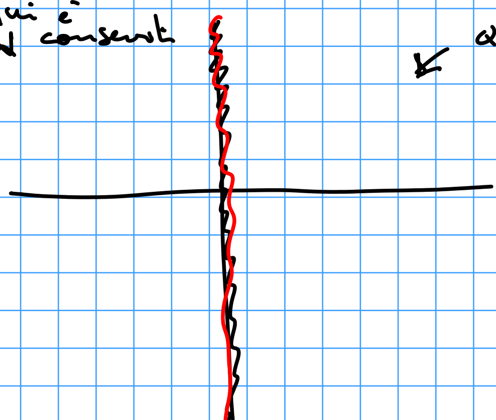


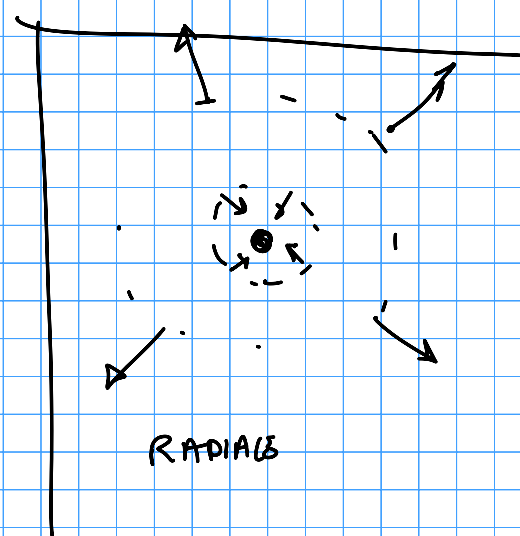


$\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Se $\vec{f} = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2+y^2}$

qui è conservativo

qui $\vec{f}$ è CONSERVATIVO





RADIALE

però $\vec{f}$ è definito