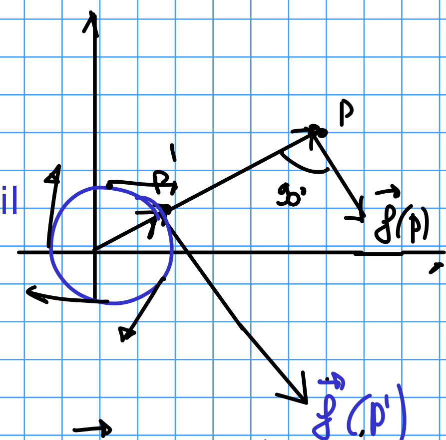
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 54 19/04/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email



ESEMPIO $\quad \vec{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ def. da

$$\vec{f}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j} \qquad \|\vec{f}(P)\| = \frac{1}{\|P\|}$$

Proviamo a vedere se $\vec{f}$ è conservativo. Cerchiamo dunque $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ con

$$(a)\ \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad (b)\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Parto da (b) e impongo

$$F(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,\frac{dy}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} = \int \frac{dz}{1+z^2}$$

$$\left(\text{dove } z = \frac{y}{x}\right) \qquad = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c(x)$$

Impongo la (a) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + c'(x) = \frac{-y}{x^2+y^2} + c'(x)$$

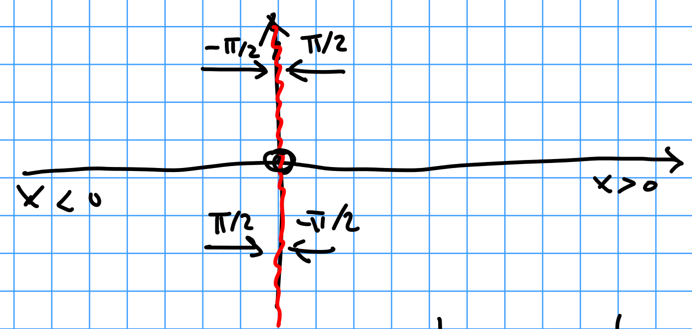
DUNQUE TROVO

$$F(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

ATTENZIONE. I CALCOLI SONO LECITI SE $x \neq 0$

LA F SCRITTA SOPRA È BEN DEFINITA SE $x>0$ o $x<0$.

VEDIAMO SE LA POSSO ESTENDERE A TUTTO $\mathbb{R}^2$



meno (0,0)

Prendiamo un punto sull'asse y, cioè $P=(0,y)$ con $y \neq 0$

Se $\boxed{y>0}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{z\to+\infty} \arctan(z) = \frac{\pi}{2}$

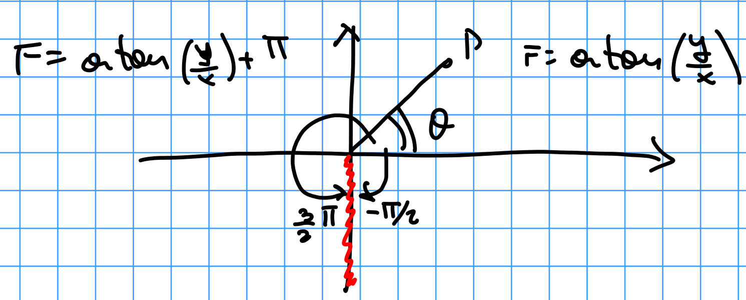
$$\lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{z\to-\infty} \arctan(z) = -\frac{\pi}{2}$$

Analogamente se $\boxed{y<0}$

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

<u>POSSO</u> DECIDERE DI PRENDERE <u>$c=0$</u> su $\{x>0\}$ e $c=\pi$ su $\{x<0\}$. IN QUESTO MODO

RISOLVO <u>UNO</u> dei due problemi sopra – le due definizioni "si incollano bene" sulla semiretta $\{(0,y),\ y>0\}$ <u>MA NON</u> sulla semiretta $\{(0,y),\ y<0\}$



IN QUESTO MODO

$$F(x,y) = \mathrm{Arg}(x,y) = \theta$$

MISURATO A PARTIRE DALLA SEMIRETTA $\{(x,0)\ x>0\}$

NON RIESCO A DEFINIRE F SU TUTTO $\mathbb{R}^2$

DUNQUE $\vec{f}$ NON SEMBRA ESSERE CONSERVATIVO su $\mathbb{R}^2$

(è sicuramente conservativo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y)\ \ y<0\}$

IN EFFETTI POSSO DIMOSTRARE che $\vec{f}$ NON È CONSERVATIVO SU $\mathbb{R}^2$ mostrando che esiste una curva chiusa su cui l'integrale non è nullo.

CONSIDERO $\gamma = \gamma_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ def. da

$$\gamma(t) = R(\cos(t), \sin(t)) \qquad R>0 \quad (\|\gamma\| = R)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma'(t) \quad R(-\sin(t), \cos(t))$$

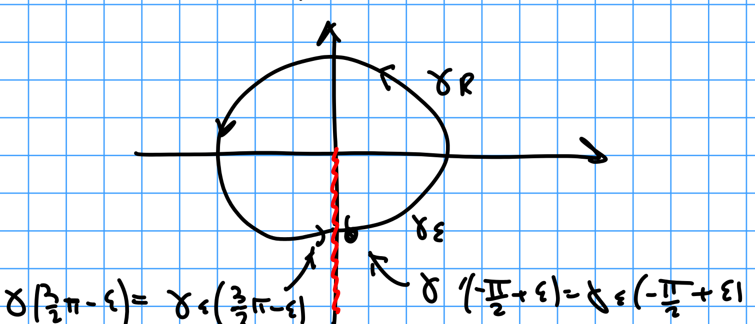
$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{-R\sin(t)}{R^2\cos^2(t) + R^2\sin^2(t)} \vec{i} + \frac{R\cos(t)}{R^2\cos^2(t) + R^2\sin^2(t)} \vec{j} \right) \left(\vec{i}\,(-R\sin(t)) + \vec{j}\,(R\cos(t)) \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{R^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))}{R^2(\cos^2(t) + \sin^2(t))}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

(qualunque $R>0$ $\quad \int_{\gamma_R} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2\pi$

TORNA CON IL FATTO CHE IL "POTENZIALE" di $\vec{f}$ è $\mathrm{Arg}(x,y)$



TOLGO A γ UN PEZZETTO ; per semplicità considero la curva $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi] \to \mathbb{R}$ e passo a:

$\gamma_\varepsilon : [-\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{3}{2}\pi - \varepsilon]$ con la stessa definizione

$$\Rightarrow \int_{\gamma_\varepsilon} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \Big[Arg(x,y) \Big]_{\gamma_\varepsilon(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}^{\gamma_\varepsilon(\frac{3}{2}\pi-\varepsilon)} = 2\pi - 2\varepsilon$$

se mando $\varepsilon \to 0$ trovo $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2\pi$ #

Def Supponiamo che $\vec{f}$ sia un campo C^1, cioè le sue componenti sono derivabili (rispetto a $x_1 .. x_N$) con derivate continue. ($\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$)

DICO che $\vec{f}$ è IRROTAZIONALE se

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j = 1 .. N \quad (\text{se } i=j \text{ è ovvio})}$$

IN ALTRI TERMINI LO Jacobiano $J_f(x)$ è una matrice $(N \times N)$ simmetrica.

NOTIAMO che se $N=3$ (o $N=2$ che è un "sottocaso" se si pensa che $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, si identifica $\mathbb{R}^2 = \{(x,y,z) : z=0\}$)

si può definire il "rotore di $\vec{f}$" come

("formalmente") $\det \begin{bmatrix} \vec{i} & D_x & f_1 \\ \vec{j} & D_y & f_2 \\ \vec{k} & D_z & f_3 \end{bmatrix} =$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} f_2\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x} f_3 - \frac{\partial}{\partial z} f_1\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1\right)\vec{k} =: \text{rot } \vec{f}$$

$$\Big(\underbrace{\vec{\nabla}}_{\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}} \otimes \vec{f}\Big)$$

CON QUESTA DEFINIZIONE $\vec{f}$ è irrotazionale $\Leftrightarrow$ $\text{rot } \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

NOTA Se $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^2$ si può immaginare che

$\vec{f}$ sia estesa a $\Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ ponendo:

$$\vec{f}(x,y,z) = \vec{f}_1(x,y)\,\vec{i} + \vec{f}_2(x,y)\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{f} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

FATTO Se $\vec{f}$ è C^1 su Ω e $\vec{f}$ è conservativo su $\Omega \Rightarrow$ $\vec{f}$ è irrotazionale su Ω

Dim. Supponiamo che F sia un potenziale $F: \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$$

Posso fare le derivate seconde di F e cioè

$$\frac{\partial F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Leftarrow \text{CONTINUE}$$

vale il teorema di Schwartz $\Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial F}{\partial x_j \partial x_i}$

$\Rightarrow$ $\vec{f}$ è irrotazionale #

QUESTO RISULTATO FORNISCE UN METODO PER DIRE CHE "f non è conservativo". Per esempio nel caso lineare $\vec{f}(x) = Ax$ $\quad A = \{a_{ij}\}$ matrice $N \times N$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij} \qquad \left(f_i(x) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \right)$$

$\vec{f}$ è irrotazionale
$\Updownarrow$
A è simmetrica $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$

Se $\vec{f}$ è conservativo $\Rightarrow$ A è simmetrica.

UNA VOLTA CHE A è simmetrica posso verificare che

$$F(x) = \frac{1}{2} x^t A x \quad \text{è un potenziale}$$

bisognerebbe fare i conti

$$\vec{f} \text{ è conservativo} \Leftrightarrow A \text{ è simmetrica.}$$

IN QUESTO CASO INVERTO L'IMPLICAZIONE

IN GENERALE non è detto che $\vec{f}$ IRROTAZIONALE $\Rightarrow$ $\vec{f}$ conservativo

Nel caso dell'esempio di prima $\vec{f}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$

VEDIAMO CHE $\vec{f}$ è irrotazionale: calcolo

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)+y\,2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)-x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

IRROTAZIONALE $\Leftarrow$ CONSERVATIVO !!!

$\boxed{\cancel{\Rightarrow}}$

Che condizioni permettono di scrivere $\Rightarrow$??

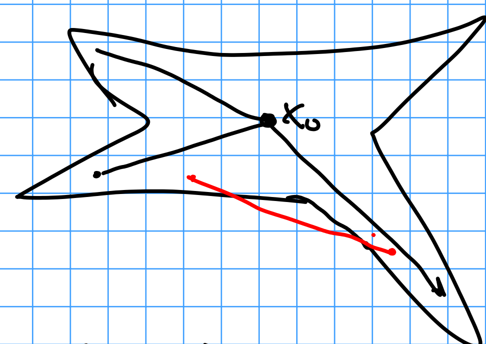
PAUSA $\to$ 9.30 (c'è un ricevimento alle 17.00 di martedì)

SI SCOPRE CHE per passare da IRROTAZIONALE A CONSERVATIVO SERVONO DELLE IPOTESI SULLA "FORMA" DEL DOMINIO Ω. Per esempio se $\vec{f}:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è irrotazionale in <u>TUTTO $\mathbb{R}^N$</u>

$\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo !!

PIÙ IN GENERALE:

<u>Def.</u> Dico che $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è $\boxed{\text{STELLATO}}$ rispetto a un punto $x_0 \in \Omega$ se



STELLATO MA NON CONVESS.

$\forall x \in \Omega$ tutto il segmento tra x_0 e x è contenuto in Ω

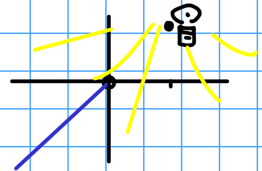
cioè

$$\forall x \in \Omega \quad \forall t \in [0,1] \quad x_0 + t(x - x_0) \in \Omega$$

(se metto una lampadina in x_0 illumino tutto Ω !!)

CASO PARTICOLARE: Ω convesso, allora Ω è stellato rispetto a qualunque punto. ($\mathbb{R}^N$ è stellato !!)

E' ABBASTANZA INTUITIVO CHE $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON È STELLATO



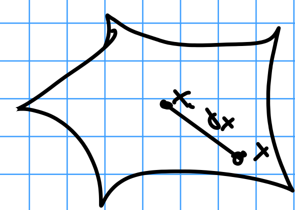
TORNA CON L'ESEMPIO INIZIALE DI CAMPO SU $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che è irrotazionale ma non conservativo.

Teorema Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto stellato rispetto a un $x_0 \in \Omega$. e se $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è irrotazionale $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo.

DIM. L'IDEA È DEFINIRE UN POTENZIALE $F : \Omega \to \mathbb{R}$

Ponendo

$$F(x) := \int_{\gamma_x} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$



dove $\gamma_x : [0,1] \to \Omega$ è il segmento da x_0 a x, cioè

$$\gamma_x(t) = x_0 + t(x - x_0)$$

IN ALTRI TERMINI

$$F(x) = \int_0^1 \vec{f}(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x - x_0)\, dt$$

Devo verificare che $\forall i = 1 .. N$ $\forall x \in \Omega$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = f_i(x)$$

Diamo per buono che si può derivare sotto il segno di integrale (si può fare perché l'integrando è C^1). Quindi

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{f}(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x - x_0)\, dt =$$

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^N f_j(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x_j - x_{0,j}) \right) dt =$$

$\frac{\partial x_j}{\partial x_i}$

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^N t \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0 + t(x-x_0))(x_j - x_{0,j}) + f_j(x_0 + t(x-x)) \cdot \delta_{ij}$$

dove $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$

$$= \int_0^1 t \sum_{j=1}^{N} \left(\underset{\vec f \text{ è irrotazionale}}{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}} \underbrace{(x_0 + t(x - x_0))}_{\gamma_x(t)} \cdot (x_j - x_{0,j}) \right) + \underset{\text{fuori dalla sommatoria}}{f_i} \overbrace{(x_0 + t(x - x_0))}^{\gamma_x(t)} =$$

$$= \int_0^1 \Big(t \underbrace{\nabla f_i(\gamma_x(t)) \cdot \dot\gamma_x(t)}_{\text{derivata della composizione}} + f_i(\gamma_x(t)) \Big) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t \frac{d}{dt} f_i(\gamma_x(t)) + f_i(\gamma_x(t)) \right) dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \Big(t f_i(\gamma_x(t)) \Big) dt = \Big[t f_i(\gamma_x(t)) \Big]_0^1 =$$

$$f_i(\gamma_x(1)) = f_i(x)$$

DUNQUE $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = f_i(x)$ cioè F è un potenziale per F.

ESEMPIO

$$\vec f(x,y,z) = x e^{x^2yz} \left(2yz\,\vec i + xz\,\vec j + xy\,\vec k \right)$$

calcoliamo rot $\vec f$

$$\det \begin{bmatrix} \vec i & D_x & 2xyz\, e^{x^2yz} \\ \vec j & D_y & x^2 z\, e^{x^2yz} \\ \vec k & D_z & x^2 y\, e^{x^2yz} \end{bmatrix} =$$

$$\vec i \left(D_y \underbrace{\left(x^2 y\, e^{x^2yz} \right)} - D_z \left(x^2 z\, e^{x^2yz} \right) \right) +$$

$$- \vec j \left(D_x \left(x^2 y\, e^{x^2yz} \right) - D_z \left(2xyz\, e^{x^2yz} \right) \right) +$$

$$\vec k \left(D_x \left(x^2 z\, e^{x^2yz} \right) - D_y \left(2xyz\, e^{x^2yz} \right) \right) =$$

$$\vec{i}\left(e^{x^2yz}\left(\underset{x^4yz+x^2}{x^2z\cdot x^2y+x^2}\right)-e^{x^2yz}\left(\underset{x^4yz+x^2}{x^2yx^2z+x^2}\right)\right)+$$

$$-\vec{j}\left(e^{x^2y\cdot z}\left(\underset{2x^3y^2z+2xy}{2xyz\cdot x^2y+2xy}-e^{x^2yz}\left(\underset{2x^3y^2z+2xy}{x^2y\,2xyz+2xy}\right)\right)\right)+$$

$$\vec{k}\left(e^{x^2yz}\left(\underset{2x^3yz+2xz}{2xyz\,x^2z+2x\cdot z}\right)-e^{x^2yz}\left(\underset{2x^3yz+2xz}{x^2z\,2xyz+2xz}\right)\right)$$

$= 0$!!

il campo è irrotazionale.

Dato che $\mathbb{R}^3$ è stellato $\Rightarrow$ il campo è conservativo.

Si può trovare un potenziale F integrando sui segmenti a partire dall'origine

$$F(x,y,z)=\int_0^1\vec{f}(tx,ty,tz)\cdot(x,y,z)\,dt=\dots$$

$$\left(e^{x^2yz}\right)$$

FINIAMO DOMANI.