Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 53 14/04/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ESERCIZIO

$$x(1-x)\,y'' + (5x-3)\,y' - 3y = \underbrace{x^2 - x}_{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}$$

dove $b_n = \begin{cases} -1 & n=1 \\ 1 & n=2 \\ 0 & n\neq 1,2 \end{cases}$

Cerco la sol. del tipo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

Dunque $(x - x^2)y'' + (5x-3)y' - 3x =$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\underbrace{a_{n+1}(n+1)n}_{a_{n+1}} - a_n n(n-1) + 5a_n n - \underbrace{3a_{n+1}(n+1)}_{a_{n+1}} - 3a_n\Big]x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[a_{n+1}(n+1)(n-3) - a_n(n^2 - n - 5n + 3)\Big]x^n$$

$$n^2 - 6n + 3 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \notin \mathbb{N}$$

$n^2 - 6n + 3 \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ DUNQUE TROVO

(R) $$a_{n+1}(n+1)(n-3) - a_n(n^2 - 6n + 3) = b_n$$

dove $b_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n=1 \\ 1 & \text{se } n=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\left(x^2 - x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right)$

Mettiamo $n=3 \Rightarrow a_4 \cdot 4 \cdot 0 - a_3(9-18+3) = b_3 = 0$ $\boxed{a_3 = 0}$ ✓

Mettiamo $n=2 \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a_3} \cdot 3 \cdot (-1) - a_2(\underbrace{4-12+3}_{-5}) = b_2 = 1$ $\boxed{a_2 = \frac{1}{5}}$

Mettiamo $n=1 \Rightarrow a_2 \cdot 2 \cdot (-2) - a_1(-2) = b_1 = -1$

$$-\frac{4}{5} + 2a_1 = -1$$ $\boxed{a_1 = \frac{-1}{10}}$

Mettiamo $n=0 \Rightarrow a_1(-3) - a_0(3) = b_0 = 0$ $\boxed{a_0 = \frac{1}{10}}$

$$-a_1 = a_0$$

Dati $a_0 - a_3$ come sopra posso scrivere

$$(R') \qquad a_{n+1} = \frac{n^2-6n+3}{(n+1)(n-3)} a_n \qquad n \geq 4$$

a_4 È LIBERO!! se fisso $a_4 \Rightarrow a_n$ sono univocamente determinati.

$$y(x) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}x + \frac{1}{5}x^2 \overset{+0 \cdot x^3}{+} \overbrace{\alpha \sum_{n \geq 4}^{\infty} \hat{a}_n x^n}^{\text{sono sol. dell'omogenea}} \qquad \overset{a_4}{\alpha} \in \mathbb{R}$$

dove gli $\hat{a}_n$ sono relativo alla condizione $\hat{a}_4 = 1$ (valore iniziale $= 1$)

Per quali x (se ce ne sono) converge $y(x)$??

Da $(R') \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n^2-6n+3}{(n+1)(n-3)} \right| = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \quad (\text{Cesaro}) \Rightarrow$$

La serie che definisce $y(x)$ ha raggio di convergenza $R=1$

$$y:]-1, 1[\to \mathbb{R}$$

Verifichiamo (per curiosità) che la $y(x)$ con $\alpha=0$ è una soluzione, IN QUESTO CASO

$$y(x) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}x + \frac{1}{5}x^2$$

$$y'(x) = -\frac{1}{10} + \frac{2}{5}x$$

$$y''(x) = \frac{2}{5}$$

$$(5x-3)\left(-\frac{1}{10}+\frac{2x}{5}\right) = -\frac{x}{2} + 2x^2 + \frac{3}{10} - \frac{6}{5}x = 2x^2 - \frac{5+12}{10}x + \frac{3}{10}$$

$$(x-x^2)y'' + (5x-3)y' - 3y =$$

$$\frac{2}{5}x - \frac{2}{5}x^2 + 2x^2 - \frac{17}{10}x + \cancel{\frac{3}{10}} - \cancel{\frac{3}{10}} + \frac{3}{10}x - \frac{3}{5}x^2 =$$

$4 - 17 + 3 = -10$

$x^2 \quad -x \qquad$ TORNA

ESEMPIO

Consideriamo

$$\vec{f}(x,y,z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{x^2+y^2+z^2} = G(\|P\|)\,\vec{P}$$

$$\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{f} : \underbrace{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}}_{\Omega} \to \mathbb{R}$$

$\Omega = \mathbb{R}^3$ MENO L'ORIGINE

Vediamo se $\vec{f}$ è conservativo. Se lo è $\exists\, V : \Omega \to \mathbb{R}$ con

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

Dalla prima $\Rightarrow$ $V(x,y,z) = \int \frac{x\,dx}{x^2+y^2+z^2}$

$w = x^2+y^2+z^2$

$dw = 2x\,dx$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) + c(y,z)$$

Imponiamo la II^a condizione:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial y}c(y,z) \underset{(\text{DEVE})}{=} \frac{y}{x^2+y^2+z^2}$$

dunque $\frac{\partial c}{\partial y} = 0$

Analogamente usando la II condizione $\frac{\partial c}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow$ $c(y,z) = \text{cost.} \in \mathbb{R}$ (Riesco a verificare tutte le 3 condizioni)

DUNQUE $\vec{f}$ è conservativo e i suoi potenziali (Ω è connesso)

sono dati da $V(x,y,z) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2+z^2) + \text{cost.}$ #

IN REALTÀ C'È UN FATTO GENERALE

<u>Def.</u> Se $\vec{f}(X) = g(\|X\|^2)\, \vec{X}$ cioè

$$\vec{f}(x_1 \dots x_N) = g(\|x\|^2)(x_1, \dots, x_N)$$

oppure $\vec{f}_i = g(\|x\|^2)\, x_i \qquad i = 1 \dots N$

dove $g : I \to \mathbb{R}$ dove I è un intervallo $I \subset [0, +\infty[$

e g è continua Nell'esempio $g(r) = \frac{1}{r}$ $g:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

ALLORA DICO CHE $\vec{f}$ è un campo RADIALE (o CENTRALE)

OGNI CAMPO DI QUESTA FORMA È CONSERVATIVO.

INFATTI POSSIAMO SICURAMENTE TROVARE $G : I \to \mathbb{R}$, C^1, tale che $G' = g$ $\left(G = \int g(r)\,dr\right)$

(Teorema fondamentale del calcolo integrale)

e definire $V(X) = \frac{G(\|X\|^2)}{2}$; allora

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(X) = \frac{G'(\|x\|)}{2}\, 2x_i = g(\|x\|^2)\, x_i = \vec{f}(x)$$

<u>NOTA</u> se $f = g(\|x\|)\, \vec{x}$ mi posso ricondurre al

così sopra considerando $\tilde{g}(r) = g(\sqrt{r})$

$\tilde{g}(\|x\|^2) = g(\|x\|)$

PERÒ devo mettermi su $\{r > 0\}$ (devo escludere $r=0$)

$\#$

Per esempio $\dfrac{\vec{x}}{\|x\|^\alpha}$ è sempre conservativo su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$(-K)\dfrac{x}{\|x\|^3}$ $x \in \mathbb{R}^3$ è il campo gravitazionale

CHIARAMENTE NON VALE IL VICEVERSA

(conservativo $\not\Rightarrow$ radiale)