Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 52 13/04/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

- CAMPI VETTORIALI – CAMPI CONSERVATIVI

Def. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ chiamo "CAMPO DI VETTORI" su Ω una $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ (STESSO N in partenza e in arrivo!)

Dico che f è C^0 (continua) / C^1 / ... / $C^{(k)}$ ... C^∞ se tutte le sue "componenti" $f_1, f_2, \dots, f_N$ sono $C^0 / C^1 / \dots / C^{(k)} / \dots C^\infty$

Di solito consideriamo $N = 2$ / $N = 3$. In questo caso scrivo

$$\vec{f}(x,y) = f_1(x,y)\,\vec{\imath} + f_2(x,y)\,\vec{\jmath}$$

$\left(\underset{\hat{e}_1}{\vec{\imath}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underset{\hat{e}_2}{\vec{\jmath}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underset{\hat{e}_3}{\vec{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right.$

(oppure $\vec{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$))

$$\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\,\vec{\imath} + f_2(x,y,z)\,\vec{\jmath} + f_3(x,y,z)\,\vec{k}$$

(N.B. $f_1 = \vec{f} \cdot \vec{\imath}$ / $f_2 = \vec{f} \cdot \vec{\jmath}$ / $f_3 = \vec{f} \cdot \vec{k}$)

#

Def. $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$, f continua. Dico che $\vec{f}$ è "CONSERVATIVO" se esiste $V : \Omega \to \mathbb{R}$ (V è <u>SCALARE</u>),

$V \in C^1(\Omega)$, tale che $\nabla V = \vec{f}$ $\boxed{\frac{\partial V}{\partial x_i} = f_i}$

<u>OSS.</u> (CASO BANALE) Se $N=1$ ogni funzione continua è derivata di una F di classe C^1 (Teor. Fond. Calcolo Int.)
Se $N \geq 2$ ci sono campi non conservativi (lo vedremo)

<u>ESEMPI</u> $\vec{f}(x,y) = (ax+by)\vec{i} + (cx+dy)\vec{j}$ $(f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$
dove $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. In altri termini

$$\vec{f}(P) = A \cdot P^t \qquad \text{dove } P=(x,y)$$
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Vediamo se $\vec{f}$ è conservativo, se e solo se esiste $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

(a) $\frac{\partial V}{\partial x} = ax+by$ (b) $\frac{\partial V}{\partial y} = cx+dy$

Dalla (a) ricavo

$$V(x,y) = \int (ax+by)\,dx = a\frac{x^2}{2} + bxy + \gamma(y)$$

(γ è una funzione della sola y).

Imponiamo che V verifichi (b). $\Rightarrow$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ax^2}{2} + bxy + \gamma(y)\right) = cx+dy \iff$$

$$bx + \gamma'(y) = cx + dy$$
$$\underbrace{(b-c)x}_{\text{dipende solo da } x} = \underbrace{dy - \gamma'(y)}_{\text{dipende solo da } y}$$

L'unico modo di verificare la relazione sopra è che entrambi i termini ai lati di $=$ siano costanti

$$\underbrace{(b-c)x = c_0} = dy - \gamma'(y) \qquad \forall x$$

Se derivo in x a sinistra $\Rightarrow b = c \Rightarrow c_0 = 0$

DUNQUE $\quad b = c \quad \gamma'(y) = dy \longleftrightarrow \gamma(y) = \frac{dy^2}{2} + \text{cost.}$

(A è simmetrico)

IN DEFINITIVA $\vec{f}$ è conservativo $\iff b = c \iff A$ è simmetrico

Se ciò avviene $\quad V(x,y) = \frac{a x^2}{2} + bxy + \frac{d}{2} y^2 + \text{cost.}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{f}(X) = AX \text{ è conservativo} \iff A \text{ è simmetrico} \\ V(X) = \frac{1}{2} X^t A X \qquad \text{si può dimostrare anche per } N \end{array}}$$

$$\left((x \ y) \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a x^2 + 2bxy + d y^2 \right)$$

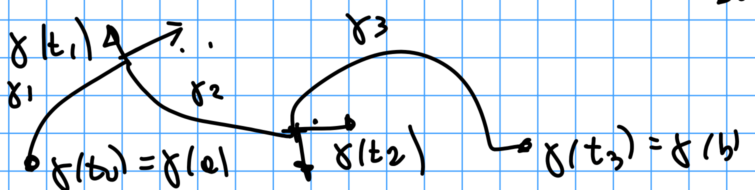
#

RICORDIAMO L'INTEGRALE CURVILINEO DI II^a SPECIE

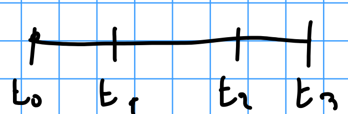
Def. Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è una curva C^1

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Se poi γ è una curva C^1 a tratti (γ è C^0 !! e esistono $a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b$ tali che $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ è C^1)



$$\left(\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_K \right)$$



$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{K} \int_{\gamma_i} \vec{f} \cdot d\vec{s} \qquad \text{dove } \gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$$

#

OSS. Se $\vec{f}:\Omega\to\mathbb{R}^N$ è conservativo, se $V:\Omega\to\mathbb{R}$ è un potenziale per $\vec{f}$, allora, per ogni coppia di punti $P_1,P_2\in\Omega$ e per ogni curva $\gamma:[a,b]\to\Omega$, C^1 a tratti, $\gamma(a)=P_1$ $\gamma(b)=P_2$ si ha:

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = V(P_2)-V(P_1)$$

Dipende SOLO dagli estremi P_1 e P_2

Dim. Facciamo il caso $\gamma\in C^1$ (se no si sommano vari pezzi)

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \nabla V(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}V(\gamma(t))\,dt = \Big[V(\gamma(t))\Big]_{t=a}^{t=b} = V(P_2)-V(P_1)$$

#

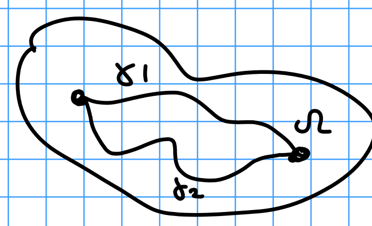
Teorema (Caratterizzazione dei campi conservativi) Ω CONNESSO.

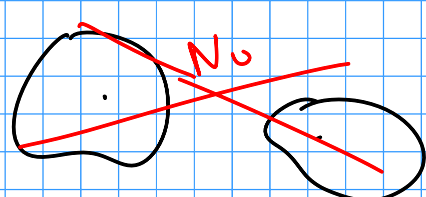
Sia $\vec{f}:\Omega\to\mathbb{R}^N$ CONTINUO. Le affermazioni seguenti sono tra loro equivalenti.

(a) $\vec{f}$ è conservativo

(b) Date due due curve $\gamma_1,\gamma_2:[a,b]\to\Omega$ C^1 a tratti con $\gamma_1(a)=\gamma_2(a)$ $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$, SI HA

$$\int_{\gamma_1}\vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2}\vec{f}\cdot d\vec{s}$$





(c) Data una curva CHIUSA $\gamma:[a,b]\to\Omega$ $(\gamma(a)=\gamma(b))$ C^1 a tratti $\Rightarrow$

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$$

Inoltre, se vale una qualunque tra (a) - (b) - (c), si ha che i possibili potenziali di $\vec{f}$ sono dati da

$$V(x) = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} + \text{costante}. \quad \left(\begin{array}{c}\text{qui serve } \Omega \\ \text{connesso}\end{array}\right)$$

dove, ho fissato $x_0 \in \Omega$ (all'inizio), e γ è una qualunque curva $\gamma : [a, b] \to \Omega$, C^1 a tratti, con $\gamma(a) = x_0$, $\gamma(b) = x$ (γ congiunge x_0 a x. V è ben definito a causa della (b)).

DIM. (a) $\Rightarrow$ (b) Questo è di fatto l'osservazione precedente dato che

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = V(\gamma_1(b)) - V(\gamma_1(a))$$

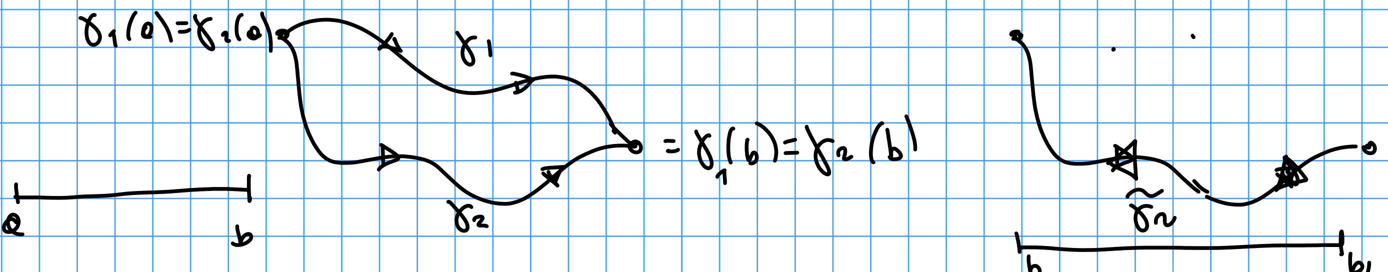
$$\int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot ds = V(\gamma_2(b)) - V(\gamma_2(a))$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Se $\gamma : [a, b] \to \Omega$ è una curva chiusa, posso considerare $\gamma_0 : [a, b] \to \Omega$ ponendo $\gamma_0(t) = \gamma(b) = \gamma(a)$

γ_0 ha gli stessi estremi di γ. Per (b)

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_0} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{si vede subito che se } \gamma_0 \text{ è} \\ \text{costante} \Rightarrow \gamma_0'(t) = 0 \Rightarrow \text{l'integrale} = 0\end{array}\right)$$

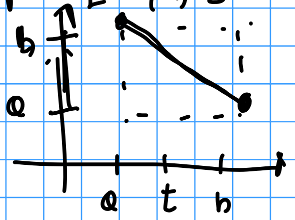
(c) $\Rightarrow$ (b) Siano γ_1 e γ_2 aventi gli stessi estremi

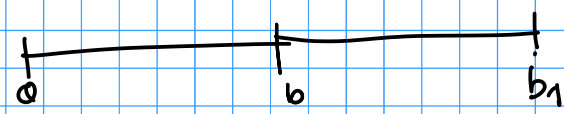


Costruisco una $\gamma : [a_1, b_1]$ chiusa ponendo $\gamma = \gamma_1 \vee \tilde{\gamma}_2$

dove $\tilde{\gamma}_2$ è la γ_2 percorsa in senso opposto. In altri termini

$\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$, $\tilde{\gamma}_2 : [a,b] \to \Omega$ $\tilde{\gamma}_2(t) = (a+b-t)$

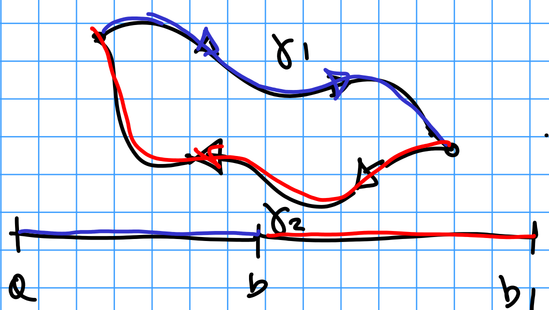




TRASLO $\tilde{\gamma}_2$ in modo da definirlo su $[b, 2b+a]$.

IN QUESTO MODO HO $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ $\tilde{\gamma}_2 : [b, b_1]$

$\gamma_1(b) = \tilde{\gamma}_2(b) = \gamma_2(b)$ posso definire $\gamma = \gamma_1 \vee \tilde{\gamma}_2$



$\gamma : [a, b_1]$

γ è chiusa perché

$\gamma(a) = \gamma_1(a)$ $\quad \gamma(b_1) = \tilde{\gamma}_2(b_1) = \gamma_2(a) \overset{\|}{=} \gamma_1(a)$

per la (c) $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$

$$\| $$

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\tilde{\gamma}_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot ds$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} \qquad \text{(vale (b))}$$

DUNQUE (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c)

PAUSA FINO ALLE 12.45

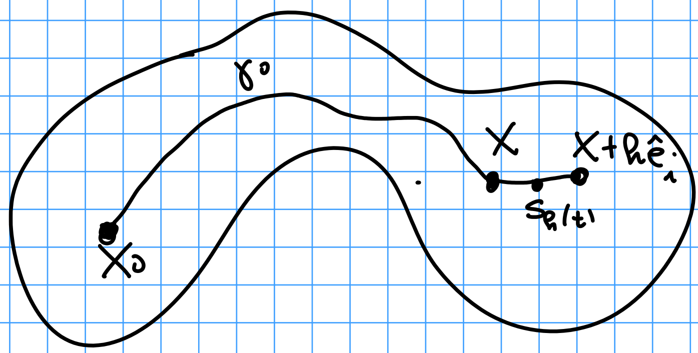
MOSTRIAMO CHE (b) $\Rightarrow$ (a) mostrando che, fissato $x_0 \in \Omega$

$$V(x) = \int_{\gamma_{x_0 x}} \vec{f} \cdot d\vec{s} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{dove con } \gamma_{x_0,x} \text{ indico una} \\ \text{(qualunque) curva da } x_0 \text{ a } x\end{array}\right)$$

è un potenziale per $\vec{f}$ (V è ben definito a causa di (b)).

(Serve Ω connesso per dire che ci sono curve da x_0 e x)

DEVO DIMOSTRARE che V è C^1 e che $\frac{\partial V}{\partial x_i} = f_i$ $i=1 \dots N$



So che c'è $\gamma_0 : [0, b] \to \Omega$ che congiunge X_0 e X e quindi

$$V(x) = \int_{\gamma_0} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

Prendo $h \in \mathbb{R}$, h piccolo. Voglio calcolare $V(X + h\hat{e}_i)$ (perchè voglio calcolare la derivata parziale i-esima)

Mi serve una curva γ_h tra X_0 e $X + h\hat{e}_i$. Definisco

$\gamma_h = \gamma_0 \vee S_h$ dove S_h è il segmento tra X e $X + h\hat{e}_i$

CIOÈ $S_h(t) = X + th\hat{e}_i$ $\quad 0 \le t \le 1$ $\quad (S_h(0) = X \quad S_h(1) = X + h\hat{e}_i$

$S_h'(t) = h\hat{e}_i$

ALLORA

$$V(X + h\hat{e}_i) = \int_{\gamma_h} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_{\gamma_0} \vec{f} \cdot d\vec{s}}_{V(X)} + \int_{S_h} \vec{f} \cdot ds$$

$$= V(X) + \int_0^1 \vec{f}(S_h(t)) \cdot S'_h(t)\, dt =$$

$$V(x) + \int_0^1 \vec{f}(X + th\hat{e}_i) \cdot h\hat{e}_i \, dt \iff$$

$$\frac{V(x+h\hat{e}_i)-V(x)}{h} = \int_0^1 f_i(x+th\hat{e}_i)\,dt$$

$$(\tau = ht \Rightarrow d\tau = h\,dt) = \frac{1}{h}\int_0^h f_i(x+\tau\hat{e}_i)\,d\tau$$

(USO IL TEOR. FOND. C. I)

Se faccio tendere $h \to 0$ trovo

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = f_i(x+\tau\hat{e}_i)\Big|_{\tau=0} = f_i(x)$$

Dunque $\forall x \in \Omega$ $\forall i = 1..N$

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = f_i(x) \leftarrow \text{CONTINUO IN } x$$

$\Rightarrow V$ è C^1 e $\nabla V = \vec{f}$

- Ci sarebbe ancora da dire che ogni altro potenziale differisce da quello scritto sopra per una costante.

In effetti se V_1 è un altro potenziale $\Rightarrow$

$$\nabla(V_1 - V) = \vec{f} - \vec{f} = 0$$

dato che Ω è connesso $\Rightarrow V_1 - V = $ costante

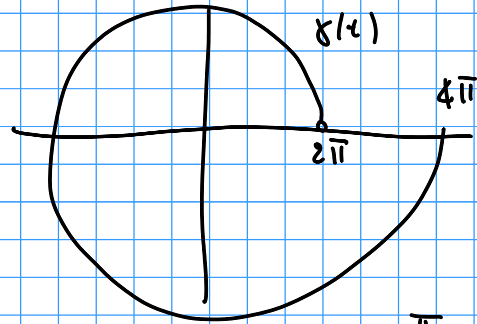
ESEMPIO Prendiamo un campo lineare come all'inizio

$$\vec{f}(x,y) = (3x+2y)\vec{i} + (2x-y)\vec{j} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(CONSERVATIVO – V potenziale $\Rightarrow V(x,y) = \frac{1}{2}(3x^2+4xy-y^2)$)

Proviamo a calcolare $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$ dove

$$\gamma(t) = \underset{t}{t}\,\underset{u_0(t)}{(\cos(t), \sin(t))} \qquad t \in [2\pi, 4\pi]$$



USIAMO LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE CURVILINEO.

$$\gamma'(t) = u_0(t) + t\, u_0'$$

$$u_0(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad u_0' = (-\sin t, \cos t)$$

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{2\pi}^{4\pi} \vec{f}(t\cos(t), t\sin(t)) \cdot \left(\vec{u}_0(t) + t\, \vec{u}_0'(t) \right) dt =$$

$$\int_{2\pi}^{4\pi} t\left((3\cos(t) + 2\sin t)\vec{i} + (2\cos(t) - \sin(t))\vec{j} \right) \cdot \left(\cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} - t\left(\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}\right)\right) dt$$

$$\int_{2\pi}^{4\pi} t\Big((3\cos(t) + 2\sin(t))(\cos(t) - t\sin(t)) + (2\cos(t) - \sin(t))(\sin(t) + t\cos(t)) \Big) dt =$$

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \Big\{ t\left(3\cos^2(t) + (2-3t)\sin(t)\cos(t) - 2t\sin^2(t)\right) + t\left(2t\cos^2(t) + (2-t)\sin(t)\cos(t) - \sin^2(t)\right) \Big\} dt$$

$$\int_{2\pi}^{4\pi} t\Big((3+2t)\cos^2(t) + (4-4t)\sin(t)\cos(t) - (2t+1)\sin^2(t) \Big) dt$$

= (*) ANDREBBE FATTO PER PARTI ...

VICEVERSA, CONOSCENDO IL POTENZIALE V, SO CHE

$$(*) = V(4\pi, 0) - V(2\pi, 0) = \frac{1}{2}\, 3\left(16\pi^2 - 4\pi^2\right) = 18\pi^2$$

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\left(3x^2 + 4xy - y^2\right)$$

Proviamo a calcolare l'integrale

$$\int_{2\pi}^{4\pi} t\left(\left(3+2t\right)\cos^2(t)+\left(4-4t\right)\sin(t)\cos(t)-\left(2t+1\right)\sin^2(t)\right)dt=$$

$$\int_{2\pi}^{4\pi}\left[\left(3t+2t^2\right)\frac{\left(1+\cos(2t)\right)}{2}+\left(2t-2t^2\right)\sin(2t)-\left(2t^2+t\right)\frac{\left(1-\cos(2t)\right)}{2}\right]dt=$$

$$\underbrace{\int_{2\pi}^{4\pi} t\,dt}_{1}+\underbrace{\int_{2\pi}^{4\pi}\left[\left(2t+2t^2\right)\cos(2t)+\left(2t-2t^2\right)\sin(2t)\right]dt}_{2}$$

$$1=\left[\frac{t^2}{2}\right]_{2\pi}^{4\pi}=\frac{16\pi^2-4\pi^2}{2}=6\pi^2$$

Per calcolare 2, dato che so cosa aspettarmi (dovrei integrare per parti) cerco la primitiva della forma

$$F(t)=\left(at^2+bt+c\right)\cos(2t)+\left(dt^2+et+f\right)\sin(2t)$$

$$\Rightarrow$$

$$F'(t)=\left(2at+b\right)\cos(2t)-2\left(at^2+bt+c\right)\sin(2t)$$
$$+\left(2dt+e\right)\sin(2t)+2\left(dt^2+et+f\right)\cos(2t)=$$

$$\left(2dt^2+\left(2a+2e\right)t+b+2f\right)\cos(t)+\left(-2at^2+\left(2d-2b\right)t+e-2c\right)\sin(t)$$

Se F' deve fare l'integrando in (2), deve essere

$$2d=2 \qquad 2(a+e)=2 \qquad b+2f=0$$

$$-2a=-2 \qquad 2(d-b)=2 \qquad e-2c=0$$

$$\Rightarrow \quad d=1,\ a=1,\ e=0,\ b=0,\ f=0 \quad c=0$$

$$\Rightarrow \quad 2=\left[t^2\cos(2t)+t^2\sin(2t)\right]_{2\pi}^{4\pi}$$

(i seni si annullano, i coseni fanno 1)

$$= 16\pi^2 - 4\pi^2 = 12\pi^2$$

DUNQUE ① + ② = $18\pi^2$ torna!!!

In effetti abbiamo trovato

$$\frac{d}{dt}\left(t^2\cos(2t) + t^2\sin(2t)\right) =$$

$$2t\cos(2t) + 2t\sin(2t) - 2t^2\sin 2t + 2t^2\cos(2t) =$$

$$(2t + 2t^2)\cos(2t) + (-2t^2 + 2t)\sin(2t)$$

= INTEGRANDO IN ②