Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 51 12/04/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

f è in L^2_T / f ha energia finita se $\int_0^T |f|^2 < +\infty$
f è T-periodica

(f deve essere misurabile — conveniamo di considerare "$f = g$" se $f(x) = g(x)$ per quasi ogni x)

Allora $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^T |f|^2}$ è una norma che proviene dal prodotto scalare $\langle f \cdot g \rangle_2 = \int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$

(qui $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) . Allora

se $f \in L^2_T \implies f \underset{L^2}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\omega t}$ nel senso che

$$\sum_{m=-K}^{K} c_m e^{im\omega t} \xrightarrow{\text{in } L^2_T \text{, se } K \to \infty} f \iff$$

$$\boxed{\lim_{K \to \infty} \int_0^T \left| \sum_{m=-K}^{K} c_m e^{im\omega t} - f(t) \right|^2 dt = 0}$$

INOLTRE

$$\boxed{\int_0^T |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2 = T\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2} \quad \text{(PARCEVAL)}$$

VEDIAMO IL CASO IN CUI f è reale.

IN QUESTO CASO SI HANNO I TEOREMI ANALOGHI

<u>TEOREMA 1</u> Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T periodica, f ha energia finita allora

$$f \underset{L^2}{=} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t)$$

<u>nel senso che</u>

$$\lim_{K\to\infty} \int_0^T \left| f(t) - a_0 - \sum_{m=1}^{K} a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t) \right|^2 dt = 0$$

dove $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$, e se $m \geq 1$ $a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos(m\omega t)\, dt$

$$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin(m\omega t)$$

INOLTRE VALE L'EGUAGLIANZA DI PARCEVAL:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2)$$

<u>TEOREMA 2</u> Se $(a_m)_{m\geq 0}$ $(b_m)_{m\geq 1}$ sono due successioni in $\mathbb{R}$

TALI CHE $\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 < +\infty$ e $\sum_{m=1}^{\infty} |b_m|^2 < +\infty$

Allora esiste una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T periodica, con energia finita tale che $f \underset{L^2}{=} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t)$

INOLTRE $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$, se $m \geq 1$ $a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos(m\omega t)$, $b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin(m\omega t)$

· SI PUÒ FARE UN ANALOGO DISCORSO PER GLI SVILUPPI IN SOLI SENI / SOLI COSENI #

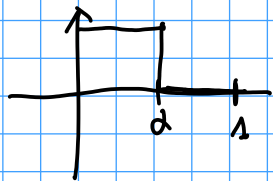
ESERCIZIO Consideriamo questo problema differenziale: $\alpha \in [0,1]$
$a \in \mathbb{R}$

$$(P.) \quad \begin{cases} y'' + a\, y = f_\alpha \quad \text{su }]0,1[\\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

nullo al bordo

(INTENDO che voglio $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ CONTINUA su $[0,1]$ DERIVABILE su $]0,1[$ e verificante (P) ??)

dove f_α =



$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,\alpha] \\ 0 & \text{se } x \in]\alpha,1] \end{cases}$$

DOMANDA : (P) ha sol. ?? / ha sol. UNICA ?? . $T = 1$!! $\omega_0 = \pi$

Come già detto cerco $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x)$

$$\Rightarrow \quad y'' = \sum_{n=1}^{\infty} -u_n\, n^2 \pi^2 \sin(n\pi x)$$

da cui le condizioni

$$\boxed{(a - n^2\pi^2)\, u_n = f_{n,\alpha}} \quad \forall n \geq 1$$

!!

$u_n = \dfrac{f_{n,\alpha}}{a - n^2\pi^2}$??

mi serve che il denominatore sia $\neq 0$

dove $f_{n,\alpha} = 2\int_0^1 f_\alpha(x) \sin(n\pi x)\, dx = 2\int_0^\alpha \sin(n\pi x)\, dx =$

$$2\left[\frac{\cos(n\pi x)}{-n\pi}\right]_0^\alpha = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi\alpha)\right)$$

(coeff. di f_α rispetto ai seni)

DUNQUE

- la soluzione esiste unica SE $\forall n \geq 1$ $\boxed{a \neq n^2\pi^2}$

e in questo caso $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{f_{n,\alpha}}{a - n^2\pi^2}}_{u_n} \sin(n\pi x)$

LA CONV. DELLA SERIE È UNIF. perché

$$u_n = \frac{2(1-\cos(n\pi\alpha))}{\pi n(a - n^2\pi^2)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n|u_n| < +\infty$$

$\Rightarrow$ CONV. UNIF. DELLA SERIE E ANCHE DELLA SERIE DELLE DERIVATE

($\Rightarrow$ y è derivabile 1 volta)

IN EFFETTI NON SO SE y'' esiste - anche se non lo so (dipende dal fatto che f_α è discontinua) questa y è RAGIONEVOLMENTE una soluzione. Per esempio posso dire che la serie delle derivate seconde converge in energia perché i coeff di y'' sono

$$v_n = u_n(-n^2\pi^2) = \frac{2(1-\cos(n\pi\alpha))}{n(a-n^2\pi^2)} \cdot (-(n^2\pi^2)) \simeq \frac{cost}{n}$$

$$\Rightarrow v_n^2 \simeq \frac{cost}{n^2} \Rightarrow \sum v_n^2 < +\infty$$

$\simeq$ la derivata seconda è una funzione a energia finita

IN PARTICOLARE LA $y(x)$ esiste UNICA $\forall$

$a \leq 0$.

Se $a > 0$ ci sono degli a che vanno male

PRENDIAMO $\boxed{a = 9\pi^2}$

$$(P)\begin{cases} y'' + 9\pi^2 y = f_\alpha \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ è verificato "per costruzione"

IN QUESTO CASO per $n = 3$ trovo

$$u_3 \cdot 0 = f_{3,\alpha}$$

DUNQUE LA SOL. ESISTE SOLTANTO SE $f_{3,\alpha} = 0$ cioè

$$\frac{2}{3}\Big(1-\cos(3\pi\alpha)\Big)=0 \iff \cos(3\alpha\pi)=1 \iff$$

$$3\pi\alpha = 2k\pi \quad \text{per } k\in\mathbb{Z} \iff$$

$$\alpha = \frac{2k}{3} \quad \text{per } k=0,1 \qquad (0\le\alpha\le 1)$$

(se $\alpha\neq 0$ e $\alpha\neq 2/3$ non esiste la soluzione)

DUNQUE $\exists$ sol. $\iff \alpha=0 \,/\, \alpha=\frac{2}{3}$

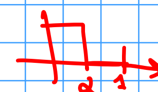
Se α è uno di questi due valori esistono infinite soluzioni y

$$y(x)=\sum_{\substack{n=1\\ n\neq 3}}^{\infty} \frac{f_{n,\alpha}}{(9-n^2)\pi^2}\sin(n\pi x) + c\sin(3\pi x)$$

al variare di $c\in\mathbb{R}$

(se $\alpha=0$, $f_\alpha\equiv 0$ e $y(x)=c\sin(3\pi x)$ $c\in\mathbb{R}$)

VARIANTE
$$\begin{cases} y''+9\pi^2 y = f_\alpha(x) \\ y'(0)=y'(\pi)=0 \end{cases}$$

f_α è lo stesso 

(derivata nulla al bordo)

Sviluppo come $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n\cos(n\pi x)$

e trovo

$$(9\pi^2-n^2\pi^2)v_n = \tilde f_{\alpha,n} \qquad (\text{se } n=3 \text{ viene } \tilde f_{\alpha,3}=0\ !!)$$

dove
$$\tilde f_{\alpha,n} = \begin{cases} \int_0^1 f_\alpha(x) = \alpha & \text{se } n=0 \\ 2\int_0^1 f_\alpha(x)\cos(n\pi x)\,dx & \text{se } n\geq 1 \end{cases}$$

Se $n\geq 1$
$$\tilde f_{\alpha,n} = 2\int_0^\alpha \cos(n\pi x)\,dx = 2\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^\alpha =$$
$$\frac{2}{n\pi}\sin(n\pi\alpha)$$

IN QUESTO CASO $\exists$ sol. $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}_{\alpha,3} = 0$ cioè

$$\sin(3\pi\alpha) = 0 \Leftrightarrow 3\pi\alpha = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{k}{3} \qquad k = 0, 1, 2, 3)$$

IN QUESTO CASO $y(x)$ esiste $\Leftrightarrow$ $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha = 1$

e comunque non è unica:

$$y(x) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 3}}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{\alpha,m}}{(9-m^2)\pi} \cos(m\pi x) + c\cos(3\pi x)$$

$$c \in \mathbb{R}$$

(se $\alpha = 0$, cioè se $f_\alpha = 0$, $y(x) = c\cos(3\pi x)$) #

PAUSA $\longrightarrow$ 9.40

Se f_n CONTINUE e $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f$ $\Rightarrow$ f continua

($\sum f_n$ è continua)

(nel caso di Fourier $\underbrace{\sum_{1}^{K} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(\omega n t)}_{\text{CONTINUE !!}}$)

CONSIDERIAMO

$$x(1-x)y'' + (2x-4)y' + 4y = 0$$

Cerco $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

DOMANDE:

- Scrivere la relazione ricorsiva sugli (a_n)
- DIRE QUALE DIMENSIONE ha lo spazio delle soluzioni

DIRE SE y esiste / esiste unica se metto le condizioni

(a) $y(0)=0$, $y'(0)=1$

(b) $y(0)=0$, $y'(0)=0$

(c) $y(0)=0$, $y^{(5)}(0)=1$

VEDIAMO LO SVOLGIMENTO. AO sol.

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x)=\sum_{\substack{n=0\\(n=1)}}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$y''(x)=\sum_{\substack{n=0\\(n=1)\\(n=2)}}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{\substack{n=0\\(n=1)}}^{\infty}(n+1)n\,a_{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

DUNQUE

$$x(1-x)y''+(2x-4)y'+4y=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n\left\{(n+1)n\,a_{n+1}-n(n-1)a_n+2na_n-4(n+1)a_{n+1}+4a_n\right\}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_{n+1}\underbrace{(n+1)(n-4)}_{n^2-3n-4}-a_n\underbrace{(n^2-n-2n-4)}_{n^2-3n-4}\right\}x^n=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n-4)(a_{n+1}-a_n)x^n$$ se impongo che faccia zero

$$(n+1)(n-4)(a_{n+1}-a_n)=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Updownarrow$$

$$(n-4)(a_{n+1}-a_n)=0 \qquad (R)$$

$n-4$ NON LO POSSO SEMPLIFICARE!! Se $n=4$ (R) vale per qualunque a_5 e a_4

$$\boxed{(R)\qquad a_{n+1}=a_n \quad \text{per ogni } n\neq 4}$$

· POSSO FISSARE INDIPENDENTEMENTE a_0 e a_5 !!

a_0 determino a_1 a_2 a_3 a_4 : $a_0 = a_1 = \dots a_4$

a_5 determino a_n $\forall n \geq 5$ $a_5 = a_6 = \dots$

Posso trovare esplicitamente $y(x)$

$$y(x) = a_0 + a_0 x + a_0 x^2 + a_0 x^3 + a_0 x^4 + a_5 \sum_{n=5}^{\infty} x^n =$$

$$(a_0 - a_5)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) + a_5 \sum_{n=0}^{\infty} x^n =$$

SERIE GEOM.

$$\boxed{\alpha (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) + \frac{\beta}{1-x}}$$

si può verificare che $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ e $\frac{1}{1-x}$

sono soluzioni !!

DUNQUE lo spazio delle sol. ha dimensione 2

· Se impongo $y(0) = 0$ $y'(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 0$ $a_1 = 1$

IMPOSSIBILE !!

· Se impongo $y(0) = 0$ $y'(0) = 0 \Rightarrow \exists$ soluzione

ma non è unica perché ho ancora a_5 libero

$$y(x) = a_5 \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - x^3 - x^4 \right)$$

· Se impongo $y(0) = 0$ $y^{(5)}(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 0$

$a_5 = \frac{1}{5!} \Rightarrow y$ esiste UNICA !!

$$D = x(1-x)y'' + (2x-3)y' + 4y = 0$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x)=\sum_{\substack{n=0\\(n=1)}}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$y''(x)=\sum_{\substack{n=0\\(n=1)\\(n=2)}}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{\substack{n=0\\(n=1)}}^{\infty}(n+1)n\,a_{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$0=\sum_{n=0}^{\infty} x^n\left\{(n+1)n\,a_{n+1} - n(n-1)a_n + 2n a_n - 3(n+1)a_{n+1} + 4a_n\right\} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1)(n-3)a_{n+1} - a_n\underbrace{\left(n^2-n-2n-4\right)}_{n^2-2n-4}\right\}x^n$$

$$n^2-3n-4=0 \iff n=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=\begin{cases}4\\-1\end{cases}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1)(n-3)a_{n+1}-(n+1)(n-4)a_n\right\}x^n$$

IMPONGO L'EQUAZIONE

$$\cancel{(n+1)}(n-3)a_{n+1} = \cancel{(n+1)}(n-4)a_n \qquad \forall n$$

$$(R)\qquad (n-3)a_{n+1} = (n-4)a_n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Se metto $n=3 \Rightarrow a_3=0$

Se $n\neq 3$

$$a_{n+1}=\frac{n-4}{n-3}a_n \qquad \forall n\neq 3$$

DUNQUE fissato a_0,

$$a_1=\frac{4}{3}a_0 \qquad a_2=\frac{3}{2}a_1=2a_0\,, \quad a_3=\overset{0}{\cdot}\,a_2$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0=a_1=a_2=a_3=0} \qquad \underline{\underline{\text{BLOCCATI}}}$$

Posso fissare a_4 come mi pare. . Se poi metto $n=4$

Trovo $a_5 = a_4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq 5$

QUESTA EQ. HA LE SOLUZIONI

$$y(x) = \alpha x^4 \qquad \text{(e basta!)}$$

PER CURIOSITÀ FACCIO LA VERIFICA

$$y(x) = x^4 \qquad y'(x) = 4x^3 \qquad y''(x) = 12x^2$$

$$x(1-x)\,12x^2 + (2x-3)\,4x^3 + 4x^4 =$$

$$\cancel{12x^3} - \cancel{12x^4} + \cancel{8x^4} - \cancel{12x^3} + \cancel{4x^4} = 0$$

ESERCIZIO $\quad x(1-x)y'' + (5x-3)y' - 3y = 0$

Se ho la condizione $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = 0$

$$\Updownarrow$$

$$A_n = 0 \quad \forall n$$

Vale anche il viceversa: Se $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = 0 \quad \forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

$\Rightarrow A_n = 0 \ \forall n$ perché segue

$f^{(n)}(0) = 0$ MA IO SO CHE $A_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$\Rightarrow A_n = 0 \quad \forall n$!!
