Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 50 (e recupero della 47)    31/03/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Sviluppo in serie di F. in soli coseni:

$f: [0, L] \to \mathbb{R}$ $\quad \omega_0 := \frac{\pi}{L}$. Allora

(sotto le solite ipotesi su $f$)

$$f(x) = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n \omega_0 x)$$

dove $v_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\,dx$ e se $n \geq 1$ $v_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\omega_0 x)$

Per ottenere questo risultato posso estendere $f$ a $[-L, L]$ in modo pari

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq L \\ f(-x) & \text{se } -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

e poi estendere $\tilde{f}$ a tutto $\mathbb{R}$ in modo $2L$-periodico.

Se faccio lo sviluppo di $\tilde{f}$ trovo solo i coseni ($\tilde{f}$ è pari)
se alla fine considero solo le $x \in [0, L]$ trovo la formula sopra

OSS. La differenza rispetto allo sviluppo in seni è che i coseni hanno una diversa proprietà in $x=0$, $x=L$ e cioè hanno DERIVATA nulla

Allora si dimostra:

- se $\tilde{f}$ è $C^1 \iff f$ è $C^1$ e $f'(0)=0$ $f'(L)=0$

$$\Rightarrow \quad f \underset{(UNIF)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\omega_0 x) + v_0$$

- Se $(v_n)$ tale che $\sum |v_n| < +\infty \Rightarrow$

$v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\omega_0 x)$ converge unif a una funzione che ha derivata nulla in $x=0$ $x=L$

- Questi sviluppi si possono usare per esempio se volessi risolvere

$$\begin{cases} y'' + a y = f \\ \boxed{y'(0) = y'(L) = 0} \end{cases}$$

(SI FA COME FATTO IERI SOSTITUENDO I COSENI AI SENI)

Si potrebbe analogamente studiare

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u \quad (+f) \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \\ u_t(x,y,0) = v_0(x,y) \\ \nabla u(x,y,0)\cdot \hat{\nu} = 0 \quad \forall (x,y) \in \partial R \end{cases}$$

$\hat{\nu}$ = NORMALE A $\partial R$

si cerca $u(x,y,t) = v_0(t) + \sum_{n,m=1}^{\infty} v_{n,m}(t) \cos(n\omega_1 x)\cos(m\omega_2 y)$

...

$f = \sum c_n e_n$ ← voglio esprimere $f$ come combinazione lineare (INFINITA) degli elementi $e_n$ di una "BASE"

$(e_n = e^{in\omega t})$

FINORA NON C'È UN RISULTATO COMPLETAMENTE SODDISFACENTE

VEDIAMO CHE L'AMBIENTE GIUSTO IN CUI CONSIDERARE LE SERIE DI F. È LO SPAZIO DELLE FUNZIONI A ENERGIA FINITA

Facciamo prima il caso complesso. $T > 0$ e $\omega T = 2\pi$

**Def.** Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $T$-periodica.

Dico che $f$ ha energia finita se $f$ è misurabile e

$$\underbrace{\mathcal{E}(f)}_{\text{ENERGIA DI } f} = \int_0^T |f(t)|^2 \, dt < +\infty$$

Indico con $L^2_T = \{$ funzioni a energia finita $\}$ { andrebbe detto meglio ..

Si vede che $L^2_T$ è uno spazio vettoriale (fra un momento)

Se $f, g \in L^2_T$ indico

$$\boxed{\langle f, g \rangle_2 := \int_0^T f(t)\, \overline{g}(t)\, dt \in \mathbb{C}}$$

Noto che questo integrale esiste dato che

$$|f(t)\, \overline{g}(t)| = |f(t)|\,|g(t)| \leq \frac{1}{2}|f(t)|^2 + \frac{1}{2}|g(t)|^2$$

Dato che $f$ e $g$ sono in $L^2_T$ $\Rightarrow$ $|f(t)\,\overline{g}(t)|$ ha integrale finito $\Rightarrow$

$f(t)\overline{g}(t)$ è integrabile. Noto anche che

- $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle_2$ è bilineare
- $\langle \lambda f, g\rangle_2 = \lambda\langle f,g\rangle$ • $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$

$\langle f, \lambda g\rangle_2 = \overline{\lambda}\langle f,g\rangle$

- $\langle f,f\rangle_2 = \int_0^T |f|^2 dt = \mathcal{E}(f) \geq 0$

È ragionevole chiamare "PRODOTTO SCALARE" (IN $L^2_T$) questa espressione

$$\langle f,\overline{g}\rangle_2 = \int_0^T f(t)\overline{g}(t)\,dt$$

<u>OSS.</u> Perché sia lecito chiamare prodotto scalare ci vorrebbe $\langle f,f\rangle > 0$ a meno che $f=0$

Questo a rigore non è vero perché ci sono funzioni $f$ con $\mathcal{E}(f)$ ma $f$ - non identicamente nulla

Per esempio $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ $(*)$

Dato che i razionali formano un insieme trascurabile $\Rightarrow$

$\int |f|^2 = 0$ ma $f$ non è zero ?!

QUESTO DISCORSO INDUCE ALLA SEGUENTE MODIFICA:

Pongo $\mathcal{L}^2_T = \{ f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ T-periodiche, misurabili, $\int_0^T |f|^2 < +\infty\}$

e se $f,g \in \mathcal{L}^2_T$ dico che sono equivalenti

quando $\int_0^T |f-g|^2 dt = 0$

<u>CIOÈ</u> quando $f-g = 0$ quasi ovunque

Per esempio la $f$ di cui sopra $(*)$ e $g(x)=0 \;\forall x$

sono equivalenti. Questa relazione $f \sim g \iff f = g$ q.o.

ha le proprietà solite: $f \sim g \iff g \sim f$; $f \sim g$, $g \sim h \Rightarrow f \sim h$.

Questo mi autorizza a definire

le "classi di equivalenza" $[f] = \{ g$ tali che $g \sim f \}$

e chiamo $L^2_T = \{ [f] : f \in \mathcal{L}^2_T \}$

Si può notare che se $f \sim g \Rightarrow \mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(g)$

e $f_1 \sim g_1$ $f_2 \sim g_2 \Rightarrow \langle f_1, f_2 \rangle_2 = \langle g_1, g_2 \rangle$

Dunque ha senso vedere tutto su $L^2_T$ (ragioniamo a meno di "quasi ovunque")

DETTA COSÌ $L^2_T$ è dotato di un

<u>prodotto scalare</u> $\langle [f], [g] \rangle_2 = \int_0^T f(t)\, \overline{g}(t)\, dt$

posso mettere qualunque elemento della rispettiva classe di equivalenza

e una <u>NORMA</u> $\| f \|_2 = \sqrt{\mathcal{E}(f)}$

$( \| f \|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$ quasi ovunque $\Rightarrow f = 0$ in $L^2 )$

---

<u>OSS.</u> Se considero le funzioni $e_n(t) = e^{in\omega t}$

queste sono "ortogonali" cioè $\langle e_n, e_m \rangle_2 = 0$ se $n \neq m$

Inoltre $\| e_n \|_2 = \sqrt{\langle e_n, e_n \rangle_2} = \sqrt{T}$

(Già visto quando abbiamo calcolato $\int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt$)

<u>OSS.</u> $L^2_T$ è uno spazio lineare:

Se $f, g \in L^2_T$

$$\| f+g \|_2^2 = \langle f+g, f+g \rangle_2 =$$

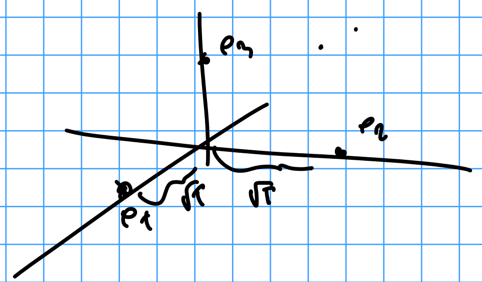
$$\langle f, f\rangle_2 + \langle f, g\rangle_2 + \langle g, f\rangle_2 + \langle g, g\rangle_2 =$$

$$\| f \|_2^2 + \langle f, g\rangle_2 + \overline{\langle f, g\rangle_2} + \|g\|_2^2 =$$

$$\| f \|_2^2 + 2\mathrm{Re}\langle f, g\rangle_2 + \|g\|_2^2 \le \underbrace{\|f\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \|g\|_2^2}_{<+\infty}$$

↑ (per Schwartz $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|$)

(se $\mathcal{E}(f) < +\infty$, $\mathcal{E}(g) < +\infty \Rightarrow \mathcal{E}(f+g) < +\infty$



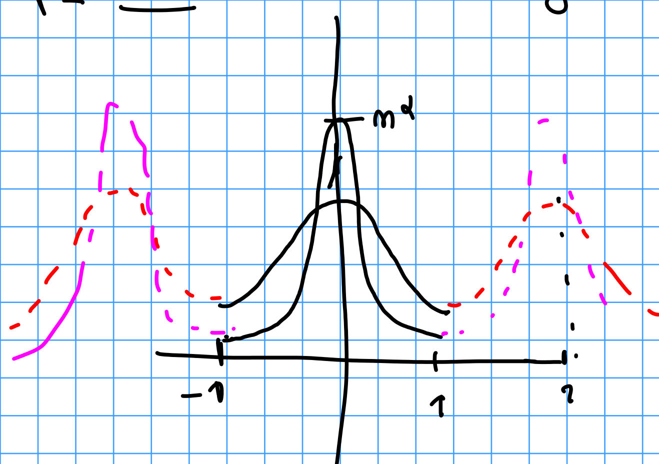

$e_n$

Avendo introdotto la $\| \ \|_2 \Rightarrow$ ho introdotto una nozione di limite:

**Def.** $f_n \xrightarrow{2} f$ (o in energia) se

$$\| f_n - f \|_2 \longrightarrow 0$$

Per esempio $\alpha > 0$ Prendiamo $f_n(t) = \dfrac{n^\alpha}{1+n^2t^2}$ su $[-1, 1]$




$T = 2$

Notiamo che $f_n(0) = n^{\alpha} \to \infty$ ; & $t \neq 0$ (in $[-1,1]$)

e se $\boxed{\alpha < 2}$ $f_n(t) \to 0$

Dunque non convergono a zero puntualmente (la convergenza non funziona in $t=0$)

Calcoliamo l'energia di $f_n$:

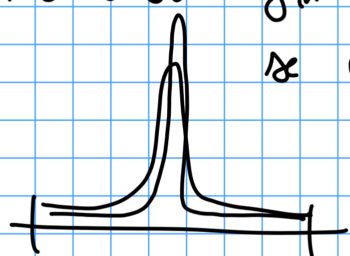
$$\mathcal{E}(f_n) = \int_{-1}^{1} \frac{n^{2\alpha}}{(1+n^2t^2)^2}\, dt \qquad \tau = nt \quad d\tau = n\, dt \quad dt = \frac{d\tau}{n}$$

$$= \int_{-n}^{n} \frac{n^{2\alpha-1}\, d\tau}{(1+\tau^2)^2}$$

se $\boxed{0 < \alpha < \frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{E}(f_n) = n^{\overbrace{2\alpha-1}^{\text{negativo}}} \underbrace{\int_{-n}^{n} \frac{d\tau}{(1+\tau^2)^2}}_{\to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(1+\tau^2)^2} < +\infty}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}(f_n) \to 0$ cioè $f_n \xrightarrow{2} 0$

DUNQUE $f_n$ <u>tendono a zero in energia</u> anche se non tendono a zero puntualmente



QUELLO CERCO DI DIMOSTRARE:

$\frac{1}{T}\langle f, e_n\rangle_2$ $\qquad e^{in\omega t}$

Se $f \in L^2_T$ $\Rightarrow$ $f \underset{(L^2)}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$

$\Updownarrow$

intendo che $\sum_{n=-K}^{K} c_n e_n \xrightarrow[(K \to \infty)]{2} f$

cioè $\lim_{K \to \infty} \underbrace{\int_0^T \left( f(t) - \sum_{n=-K}^{K} c_n e_n \right)^2 dt}_{(<\infty)} = 0$

IN EFFETTI QUESTO È VERO.

Facciamo un calcolo di $(\ast\ast)$ cioè di

$$\left\| f - \sum_{-K}^{K} c_n e_n \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \left\| \sum_{-K}^{K} c_n e_n \right\|_2^2 - 2\,\mathrm{Re}\left( \left\langle f, \sum_{-K}^{K} c_n e_n \right\rangle_2 \right) = (A)$$

(proprietà del prodotto scalare: $\|f-g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle f, g\rangle)$)

- $$\left\| \sum_{-K}^{K} c_n e_n \right\|_2^2 = \left\langle \sum_{-K}^{K} c_n e_n , \sum_{-K}^{K} c_m e_m \right\rangle_2 =$$

$$\sum_{m,n=-K}^{K} \langle c_n e_n , c_m e_m \rangle_2 = \sum_{m,n=-K}^{K} c_n \overline{c_m} \underbrace{\langle e_n, e_m \rangle}_{\substack{0 \text{ se } n \neq m \\ T \text{ se } n = m}} =$$

$$\sum_{n=-K}^{K} c_n \overline{c_n}\, T = T \sum_{-K}^{K} |c_n|^2$$

- $$\left\langle f, \sum_{-K}^{K} c_n e_n \right\rangle = \sum_{-K}^{K} \langle f, c_n e_n \rangle =$$

$$\sum_{-K}^{K} \overline{c_n} \underbrace{\langle f, e_n \rangle}_{c_n \cdot T} = T \sum_{-K}^{K} \overline{c_n}\, c_n = T \sum |c_n|^2$$

DUNQUE

$$T \sum_{-K}^{K} |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2$$

$$0 \leq \left\| f - \sum_{-K}^{K} c_n e_n \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - T \sum_{-K}^{K} |c_n|^2 \quad \forall n$$

QUESTO MI DICE CHE

esiste perché è a termini $\geq 0$

(a) Se $f \in L^2_T$ $\left( \int_0^T |f|^2 dt < +\infty \right) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_2^2 < +\infty$

(b) $\left\| f - \sum_{-K}^{K} c_n e_n \right\|_2 \xrightarrow{K \to \infty} 0 \iff \frac{1}{T} \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$

Rimarrebbe da capire se effettivamente vale una delle due in (b). **SI'** (senza dim.)

ALLA FINE VALE QUANTO SEGUE

**Teorema** (Serie di Fourier complesso in $L^2_T$)

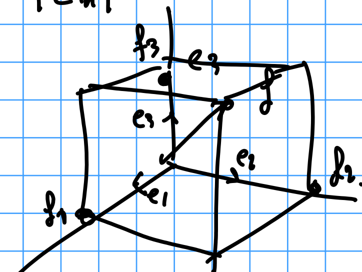
(a) Se $f \in L^2_T$ allora $\left( c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \right)$

$$f \underset{(L^2)}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad , \text{ cioè } \quad \lim_{k \to \infty} \left\| f - \sum_{-k}^{k} c_n e^{in\omega t} \right\|_2 = 0$$

e inoltre vale l' EGUAGLIANZA DI PARCEVAL

$$\int_0^T |f(t)|^2 = \| f \|_2^2 = T \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

$$\left( \begin{array}{l} T|c_n|^2 = \| f_n \|^2 \\ \text{dove } f_n = \text{proiezione di } f \text{ su } e_n \end{array} \right)$$




$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \|f_3\|^2$

(b) *Viceversa* data una successione $(c_n)$ in $\mathbb{C}$ $n \in \mathbb{Z}$ tale che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$

la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ ha limite $f$ in $L^2_T$

cioè trovo una $f$ tale che $f \underset{(L_2)}{=} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$

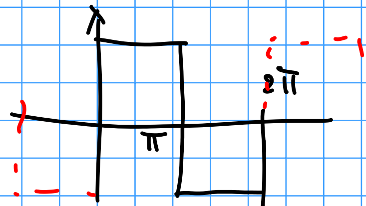
e si ha $c_n = \frac{1}{T} \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$

e dunque $\| f \|_2^2 = T \sum |c_n|^2$

(in questo (b) serve il fatto che $L^2_T$ è COMPLETO ...)

( $\sum |c_n| < +\infty \Rightarrow$ convergenza UNIF. $\sum |c_n|^2 < +\infty \Rightarrow$ CONV. IN $L^2$ o IN ENERGIA )

ESEMPIO (ONDA QUADRA revisitata)

$f(t) =$ 

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < \pi \\ -1 & \text{se } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

$f$ è in $L^2$ dato che $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi < +\infty$

Calcoliamo i $c_n$ : $\quad c_0 = 0$ ($f$ ha media nulla)

se $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(- e^{-int}\right) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-int}\, dt =$$

$$- \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{\pi} =$$

$$- \frac{i}{2\pi n} \left( e^{0} - e^{in\pi} \right) + \frac{i}{2\pi n} \left( e^{-in\pi} - e^{0} \right) =$$

$$\left( e^{-in\pi} = e^{in\pi} = \cos(n\pi) = (-1)^n \right)$$

$$- \frac{i}{2\pi n} \left( 1 - (-1)^n \right) + \frac{i}{2\pi n} \left( (-1)^n - 1 \right) =$$

$$\frac{2i}{2n\pi} \left( (-1)^n - 1 \right) = \frac{i}{n\pi} \left( (-1)^n - 1 \right)$$

Sapevamo già che
$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \underset{(\text{PUNT.})}{=} \sum_{\substack{-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{i}{n\pi} \left( (-1)^n - 1 \right) e^{int}$$

Da $L^2$ otteniamo $f \underset{(L^2)}{=}$

che significa: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{-K}^{K} c_n\, e^{int} \right|^2 dt \longrightarrow 0$

Inoltre (PARCEVAL)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt = \sum_{\substack{-\infty \\ (n\neq 0)}}^{+\infty} |c_n|^2$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$1 \qquad 2\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)\right|^2 =$$

errore a lezione

$$(n=2K+1) \qquad 2\sum_{K=0}^{\infty}\frac{4}{(2K+1)^2\pi^2} \iff$$

$$\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{(2K+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$