Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 49 30/03/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

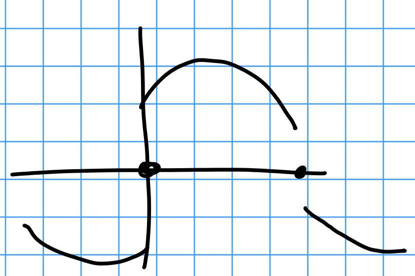
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Ricordo che, se $L > 0$ e chiamo $\omega_0 = \dfrac{\pi}{L}$ $(\omega_0 L = \pi)$

data una funzione $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, se verifica le ipotesi dette ieri

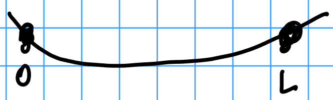
$\Rightarrow$ posso sviluppare
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{u_n \sin(n\omega_0 x)}_{s_n(x)} \quad \text{dove}$$
$(x \in [0, L])$ 2L-periodica
$$u_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega_0 x)$$

Noto che la somma della serie mi dà una funzione che in $x = 0$ e $x = L$ si annulla (se $f(0) \neq 0$ la serie non converge pt. a f



Se c'è convergenza uniforme $\Rightarrow f(0) = f(L) = 0$

ESEMPIO Risoluzione di equazioni diff. con $\boxed{\text{dato al bordo}}$



← Devo assegnare la posizione in $x=0$ e $x=L$

Prendiamo $a \in \mathbb{R}$ e consideriamo l'equazione

NON CONTIENE y'

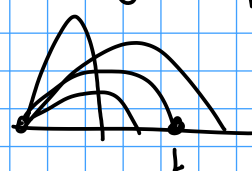
$$(P)\begin{cases} y'' + a y = f & \text{su }]0,L[\\ y(0) = y(L) = 0 & \leftarrow \text{(condizione al bordo)} \end{cases}$$

$(y(0) = \alpha \quad y'(0) = \beta \quad \dots)$

: {cerco $y : [0,L]$ continua in $[0,L]$ derivabile 2 volte in $]0,L[$ e verificante l'equazione}

dove $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ è (un dato) assegnato

{Si potrebbe risolvere in modo tradizionale scrivendo la soluzione generale (che dipende dal parametro $(\alpha = 0, \ \beta = y'(0) \in \mathbb{R})$ vedo se è possibile assegnare β in modo che $y(L) = 0$.



Voglio un altro modo: cerco la soluzione del tipo

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{u_n} \sin(n\omega_0 x) \leftarrow \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{L}$$

(a volte li ho chiamati y_n..)

Per seguire questa strada considero lo sviluppo di f

$$f(x) \underset{(??)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(n\omega_0 x) \qquad \text{dove } f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\omega_0 x)\,dx$$

Se y è fatto come sopra (e se tutto va bene..)

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \, n\omega_0 \cos(n\omega_0 x)$$

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n (-n^2\omega_0^2) \sin(n\omega_0 x) \leftarrow$$

Se impongo che valga l'equazione

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n(-n^2\omega_0^2)+a\,u_n-f_n\right)\sin(n\omega_0 x)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$(*)\quad u_n(a-n^2\omega_0^2)=f_n \qquad \forall n\geq 1$$

CI SONO DUE CASI:

(a) $a-n^2\omega_0^2\neq 0 \quad \forall n\geq 1 \iff \begin{cases} a\leq 0 \\ a>0 \text{ e } \frac{\sqrt{a}}{\omega_0}\notin \mathbb{N}=\{1\dots n\dots\}\end{cases}$

In questo caso gli u_n sono univocamente determinati da

$$u_n=\frac{f_n}{a-n^2\omega_0^2}\left(=\frac{2}{L}\frac{1}{a-n^2\omega_0^2}\int_0^L f(x)\sin(n\omega_0 x)\,dx\right)$$

A questo punto mi devo chiedere se definendo

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{a-n^2\omega_0^2}\sin(n\omega_0 x)$$

trovo effettivamente una soluzione. Lo riesco a dimostrare se metto un minimo di ipotesi su f.

(IPOTESI) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|<+\infty}$ $\quad (\Rightarrow f \text{ continua})$ $\quad \not\Leftarrow$

$\Rightarrow |u_n|=\left|\frac{f_n}{a-n^2\omega_0^2}\right|$ hanno la proprietà $\sum n^2|u_n|<+\infty$

$\Rightarrow y$ è C^2 e sono leciti i passaggi fatti sopra. (scambi tra derivate e serie)

$$\Rightarrow y''+ay=f$$

Inoltre, per la conv. unif. di $\sum y_n \sin(n\omega_0 x) \Rightarrow y(0)=y(L)=0$

LA CONDIZIONE AL BORDO "VALE AUTOMATICAMENTE"

PERCHÉ ho chiesto $y = \sum u_n s_n$ e s_n verificano

le condizioni al bordo

DUNQUE (nel caso $a \neq n^2 \omega_0^2 \ \forall n \geq 1$)

$\forall f$ (con quelle ipotesi) esiste UNICA y soluzione di (P)

(inoltre - si può dim. - che ogni sol. di (P) si scrive come una tale serie)

<u>OSS.</u> Se <u>a verifica la condizione sopra</u> si può anche risolvere

(UNIVOCAMENTE, per ogni f (..)) il problema

$$\begin{cases} y'' + a y = f \\ y(0) = A \quad y(L) = B \end{cases} \qquad \text{dati } A, B \in \mathbb{R}$$

Per farlo cerco $y = y_1 + \bar{y}$ dove

$$\begin{cases} y_1'' + a y_1 = f \\ y_1(0) = 0 \quad y_1(L) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{y}'' + a \bar{y} = 0 \\ \bar{y}(0) = A \quad \bar{y}(L) = B \end{cases}$$

si riesce a calcolare con le formule solite e col sistema detto all'inizio

#

<u>CASO (b)</u> $\exists \bar{n} : \quad a = \omega_0^2 \bar{n}^2$ Allora la condizione $(*)$

$$(*) \quad u_n (a - n^2 \omega_0^2) = f_n \qquad \text{per } n = \bar{n} \implies$$

$$0 = f_{\bar{n}} \qquad (\text{nessuna informazione su } u_{\bar{n}})$$

DUNQUE IN QUESTO CASO

- $\exists$ soluzione $\iff f_{\bar{m}} = 0 \iff \int_0^L f(x) \sin(\bar{m}\omega_0 x)\, dx = 0$

- Se $f_{\bar{m}} = 0$ ci sono infinite soluzioni date dalla formula

$$y(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \bar{m}}}^{\infty} \frac{f_n}{a - n^2\omega_0^2} \sin(n\omega_0 x) + \lambda \sin(\bar{m}\omega_0 x)$$

$(\forall \lambda \in \mathbb{R})$

I VALORI DI $a = n^2\omega_0^2$ sono "critici" per il problema

IL COMPORTAMENTO DEL PROBLEMA (P)

(È ANALOGO A UN SISTEMA $AY = B$

- se $\det A \neq 0$ $\exists\, Y$ $\forall B$
- se $\det A = 0$ $\exists\, Y \iff B \in$ opportuno sottospazio

e se Y esiste Y non è unica.)

Attenzione: nei calcoli sopra u_n e y_n indicano la stessa cosa.

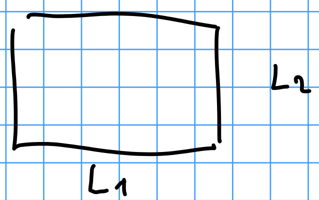
OSS. Se su f metto delle ipotesi più forti, tipo

$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |f_n| < +\infty$ $(\Rightarrow f \in C^k)$

$\Rightarrow$ y è di classe C^{k+2} $\left(\text{perché } \sum_{n=1}^{\infty} n^{k+2} |u_n| < +\infty\right)$

VEDIAMO UN ESEMPIO SIMILE PER UN'EQ. ALLE DERIVATE PARZIALI

Dati $L_1 > 0$ e $L_2 > 0$ considero il rettangolo



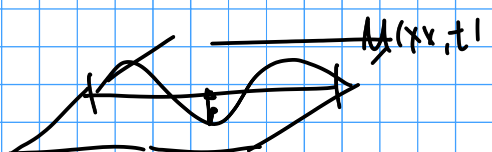
$= \quad R = \{(x,y) : 0 \le x \le L_1,\ 0 \le y \le L_2\}$

Vediamo R come una membrana elastica fissata al bordo

(R è un "TAMBURO RETTANGOLARE")

Voglio studiare il comportamento del tamburo.

$\Rightarrow$ descrivo la posizione della membrana con una funzione $u = u(x,y,t)$ $\quad (x,y) \in R \quad t \in \mathbb{R}$



lo spostamento dalla posizione di riposo nel punto (x,y) all'istante t

TROVO L'EQUAZIONE (di D'Alembert)

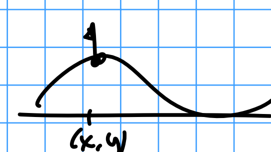
$$(E.A.)\begin{cases} u_{tt} = \Delta_{xy} u + \cancel{f} \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \\ u_t(x,y,0) = v_0(x,y) \end{cases}$$

CONDIZIONI AL TEMPO $t=0$

condizione al bordo: $u(x,y,t) = 0$ se $(x,y) \in \partial R$ $\ \forall t \in \mathbb{R}$

$u_{tt} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u \qquad \Delta u = \Delta_{xy} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

OPERATORE DI LAPLACE



f è una funzione assegnata. Per un momento pongo $f = 0$

$f = f(x,y,t)$

u_0 e v_0 sono due funzioni assegnate $v_0, u_0 : R \to \mathbb{R}$
(posizione e velocità iniziali in (x,y)

PAUSA DI 5 MINUTI

$$(\text{Eq. Al.})_0 \begin{cases} u_{tt} = \Delta u \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \\ u'(x,y,0) = v_0(x,y) \\ u(x,y,t) = 0 \quad \text{se } (x,y) \in R \end{cases}$$

condizioni iniziali ($u(x,y,0)$, $u'(x,y,0)$)

condizione al bordo ($u(x,y,t)=0$)

Cerco degli sviluppi in serie di Fourier sul rettangolo R :

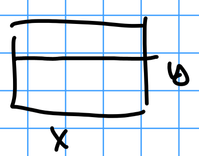
Data $h(x,y)$ la posso scrivere $\sum_{n\,m=1}^{\infty} u_{nm} \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$

dove $\omega_1 = \frac{\pi}{L_1}$ $\quad \omega_2 = \frac{\pi}{L_2}$

(prima fisso y e faccio lo sviluppo in x, poi sviluppo in y il risultato)

$$\Rightarrow \quad u_{nm} = \frac{2}{L_1}\frac{2}{L_2} \iint_R h(x,y)\sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)\,dx\,dy$$

(**)



Allora posso supporre che le due funzioni u_0 e v_0 si possono scrivere:

$$u_0(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \hat{u}_{n,m} \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

$$v_0(x,y) = \sum_{n,m}^{\infty} \hat{v}_{nm} \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

← $\hat{u}_{nm}$ e $\hat{v}_{nm}$ si ottengono dalle u_0 e v_0 come in (**)

CERCO $\quad u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm}(t) \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$

Se tutto torna (lo giustificherò dopo)

$$\frac{\partial}{\partial t} u = u_t(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u'_{nm}(t)\sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u''_{nm}(t) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm}(t)(-n^2\omega_1^2) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm}(t)(-m^2\omega_2^2) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)$$

$$\Rightarrow \Delta u = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm}(t)\left(-n^2\omega_1^2 - m^2\omega_2^2\right) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)$$

Se impongo che valga (E. A)

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(u''_{nm}(t) + (n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2)\, u_{nm}(t)\right) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y) = 0$$

$$\Uparrow$$

$$\begin{cases} u''_{nm}(t) + \underbrace{(n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2)}_{\lambda_{nm} > 0}\, u_{nm}(t) = 0 \\ u_{n,m}(0) = \hat{u}_{n,m} \qquad u'_{nm}(0) = \hat{v}_{n,m} \end{cases}$$

$\leftarrow$ EQ. DIFF. ORDINARIA IN $u_{n,m}$

PONGO $\lambda_{nm} = n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2$

$$\Rightarrow \quad u_{nm}(t) = A_{nm} \sin\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\, t\right) + B_{nm} \cos\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\, t\right)$$

$t=0 \quad u_{nm}(0) = \underline{B_{nm} = \hat{u}_{n,m}}$

$$u'_{nm}(t) = \sqrt{\lambda_{nm}}\left(A_{nm} \cos\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\right) - B_{nm} \sin\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\, t\right)\right)$$

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad A_{nm} = \frac{\hat{v}_{nm}}{\sqrt{\lambda_{nm}}}$$

$$\Rightarrow$$

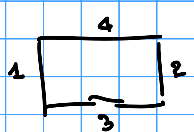
$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \overbrace{\left(\hat{u}_{n,m} \sin\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\, t\right) + \frac{\hat{v}_{nm}}{\sqrt{\lambda_{nm}}} \cos\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\, t\right)\right) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)}^{M_{n,m}(t,x,y)}$$

CON UN PO' DI PAZIENZA SI VEDE CHE, sotto opportune ipotesi su u_0 e v_0 (anzi sui coeff. $\hat{u}_{n,m}$ e $\hat{v}_{n,m}$ $\Rightarrow$) la serie definita sopra converge abbastanza bene e dunque definisce una u di classe C^2 che verifica le condizioni iniziali.

$$\left(\text{tipo } \sum |\hat{u}_{n,m}| < +\infty \quad \sum |\hat{v}_{n,m}| < +\infty \right)$$

INOLTRE, LA CONDIZIONE AL BORDO È AUTOMATICAMENTE VERIFICATA (se la serie sopra converge unif. se vale •) perché le funzioni $S_{n,m}(x,y) = \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$ si annullano su

$$\partial R = \underset{1}{\{x=0,\ y\in[0,L_2]\}} \cup \underset{2}{\{x=L_1,\ y\in[0,L_2]\}} \cup \underset{3}{\{x\in[0,L_1],\ y=0\}} \cup \underset{4}{\{x\in[0,L_1],\ y=L_2\}}$$



<u>OSS.</u> OGNI SINGOLO ADDENDO DELLA SERIE, cioè $M_{n,m}(t,x,y)$ è soluzione dell'eq. di D'Alembert, verifica le condizioni al bordo, e hanno come condizioni iniziali

$$M_{n,m}(0,x,y) = \hat{u}_{n,m}\sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{n,m}(0,x,y) = \hat{v}_{n,m}\sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

Queste $M_{n,m}$ si possono pensare come i "modi fondamentali" di vibrazione del tamburo e i $\sqrt{\lambda_{nm}}$ sono in qualche senso le frequenze "armoniche"

$$\sqrt{\lambda_{nm}} = \sqrt{n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2}$$