Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 48   29/03/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

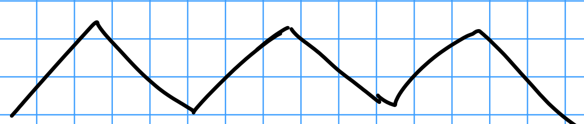
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

SERIE DI FOURIER:

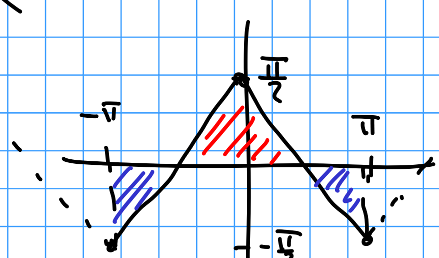
(1) Dato f ⟹ costruisco i coeff. c_n (a_n, b_n) ⟹ definisco la serie di F.
Se valgono opportune ipotesi su f ⟹ la serie di F. converge a f

(2) Data una succ. (c_n) in $\mathbb{C}$ $/ (a_n)(b_n)$ in $\mathbb{R}$ / ⟹ definisco la serie trigonom.
Sotto opportune ipotesi "di sommabilità" ⟹ la serie converge a una f
⟹ i coeff. di Fourier di f sono proprio i (c_n) $((a_n),(b_n))$
A seconda della sommabilità dei (c_n) ⟹ proprietà di regolarità di f

ESEMPIO



(onda triangolare)



Poniamo

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - |x| \quad \text{se} \quad |x| \le \pi$$

e poi esteso a tutto $\mathbb{R}$ in modo 2π-periodico.

NOTO che f è regolare a tratti ed è continua / f è derivabile tranne che nei punti $k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ e $|f'(x)| \leq 1$ se $x \neq k\pi$

Posso dire che la serie di F. converge puntualmente a f.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

SI VEDE FACILMENTE CHE f è PARI $\Rightarrow$ $c_n = c_{-n} \in \mathbb{R}$

oppure $b_n = 0 \ \forall n$ ($a_n = 2c_n$ se $n \geq 2$ $a_0 = c_0$).

Calcoliamo i coefficienti. Stavolta partiamo dai coeff reali.

$b_n = 0 \ \forall n$ $\qquad a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \dfrac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)dt = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\pi}{2}t - \dfrac{t^2}{2}\right]_0^{\pi/2}$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = 0$$

Se $n \geq 1$ $\quad a_n = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - |t|\right)\cos(nt) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)\cos(nt)\,dt$

$$= \text{per parti} \quad \frac{2}{\pi}\Bigg[\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\underbrace{\frac{\sin(nt)}{n}}_{=0 \text{ in } t=0 \text{ e } t=\pi}\Bigg]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\left(-\sin(nt)\right)dt =$$

$$\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\left(-(-1)^n + 1\right) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \dfrac{4}{\pi n^2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

DUNQUE

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left(-(-1)^n + 1\right)\cos(nt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)t)$$

($\forall t$ per la CONV. PUNTUALE
SE USO IL TEOREMA 1)

PERÒ SE GUARDO GLI a_n $\Rightarrow$ $|a_n| \leq \dfrac{\text{cost}}{n^2} \Rightarrow \sum |a_n| < +\infty$

$\Rightarrow$ la convergenza è uniforme (per i teoremi tipo (2))

Mettiamo $t = 0$ nella formula $\Rightarrow$ $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ DA CUI

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^2} \iff \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Per curiosità vediamo la versione complessa:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - |t|\right) e^{-int} \qquad n=0 \quad c_0 = 0 \quad (c_0 = a_0 \ .. \ )$$

non è poi non posso porre $\int_0^{\pi}$

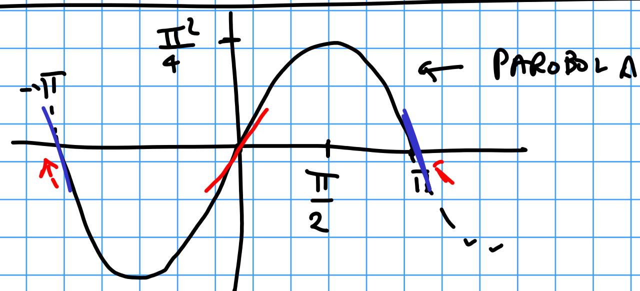
$n \geq 1$

$$= \text{per parti:} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - |t|\right) \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi i n} \int_{-\pi}^{\pi} -\operatorname{sgn}(t)\, e^{-int}$$

DEVO SPEZZARE IN DUE (è lungo - lasciamo perdere)

$$\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi} \ \ldots$$

ESEMPLO



$$f(t) = \begin{cases} -t(t-\pi) & \text{se } t \in]0,\pi] \\ t(t+\pi) & \text{se } t \in [-\pi, 0] \end{cases} \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = \frac{\pi^2}{4} \qquad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}$$

f è dispari: se $t \in [0,\pi]$ $f(-t) = +t(-t-\pi) = -t(t+\pi) = -f(t)$

Poi ESTENDO f a tutto $\mathbb{R}$ in modo 2π-periodico.

NOTA: $\boxed{f \text{ è } C^1}$ dato che $f'(t) = \begin{cases} -2t + \pi & t \in]0,\pi[\\ 2t + \pi \end{cases}$

limite dx limite sx

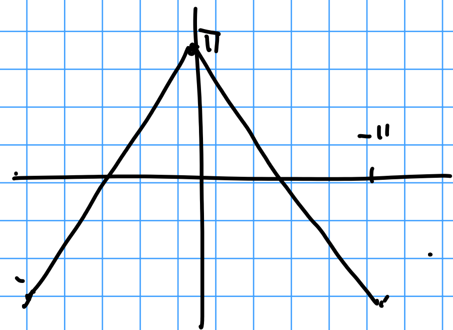
$$\Rightarrow f'(0^+) = \pi = f'(0^-)$$

Analogamente
$$f'(\pi^-) = -2\pi + \pi = -\pi$$
$$f'(-\pi^+) = -2\pi + \pi = -\pi \qquad f'(\pi) = -\pi = f'(-\pi)$$
$$\parallel$$
$$f'(\pi^+)$$

NON BASTA GUARDARE $f'(0)$ serve anche $f'(\pi)$ e $f'(-\pi)$

Ovviamente f' è 2π periodica:

$f' \rightarrow$



$(f' = 2 \cdot$ onda triangolare$)$

Calcoliamo i coeff. di F. reali. Dato che f è dispari $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)\sin(nt)}_{\text{PARI}}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \overset{\text{(PER PARTI)}}{=}$$

$$\frac{2}{\pi}\left[f(t)\left(\frac{-\cos(nt)}{n}\right)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt \overset{\text{(PER PARTI)}}{=}$$

$f(0) = f(\pi) = 0$

$$\frac{2}{n\pi}\left[f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi} f''(t)\sin(nt)\,dt =$$

$\sin(nt) = 0$ se $t = 0/\pi$

$$-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}(-2)\sin(nt) = \frac{4}{n^2\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} =$$

$$\frac{4}{n^3\pi}\left(-(-1)^n + 1\right) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \dfrac{8}{n^3\pi} & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\big((2k+1)t\big)$$

COMMENTI: Da $f \in C^1 \Rightarrow$ la serie converge unif. (teorema tipo 1)

Però dall'analisi dei coeff. vedo che $n|b_n| \le \dfrac{\text{cost}}{n^2} \Rightarrow \sum n|b_n| < +\infty$

$\Rightarrow$ (teorema tipo 2) f è derivabile (lo sapevo già), la serie delle derivate converge unif. a f'

e $\quad f' = \underbrace{\sum \text{derivate}}_{\text{ONDA TRIANGOLARE}}$

IN REALTÀ è ovvio dato che la $f' = $ l'onda triangolo

Mettiamo $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(t) = \frac{\pi^2}{4}$. Dalla serie $\Rightarrow$

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \underbrace{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}_{(-1)^k}$$

$$\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} \cos\frac{\pi}{2} + \cos(k\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

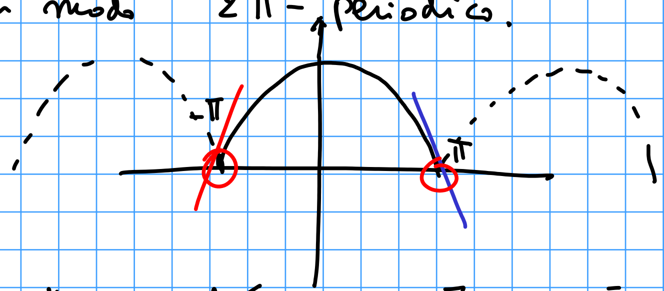
$= (-1)^k \cdot 1$

DUNQUE $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{16}$$ #

PAUSA $\longrightarrow$ 9.40

III° COMPITINO 24/4/2021 (da confermare)

<u>ESEMPIO</u> $f(t) = (\pi^2 - t^2)$ se $t \in [-\pi, \pi]$ ed estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo 2π-periodico.



f è regolare a tratti perché in $]-\pi, \pi[$ esiste $f'(t) = -2t$ che è limitata su $]-\pi, \pi[$. INOLTRE f è continua.

f $\boxed{\text{NON è } C^1}$ perché
$$f'(\pi^-) = -2t\Big|_{t=\pi} = -2\pi$$
$$f'(-\pi^+) = -2t\Big|_{t=-\pi} = 2\pi$$

Dunque in $t = \pi$ $\quad \underbrace{f'(\pi^-)}_{=-2\pi} \neq f'(\pi^+) = \underbrace{f'(-\pi^+)}_{=2\pi}$

Calcoliamo i coeff. di F. NOTO che f è pari $\Rightarrow b_n = 0 \ \forall n$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - t^2) = \frac{1}{2\pi}\left[\pi^2 t - \frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{2\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{3}\pi^2}$$

$n \geq 1$
$$a_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt =$$

(per parti)
$$\frac{2}{\pi}\underbrace{\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{\substack{f(\pi)=0 \\ \sin(nt)=0 \ t=0}} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} f'(t)\sin(nt)\,dt =$$

(per parti)
$$-\frac{2}{\pi n}\left[f'(t)\frac{(-\cos(nt))}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi} f''(t)\cos(nt)\,dt =$$

qui sto considerando i pti di $[0,\pi]$ dunque $f'(\pi) = f'(\pi^-) = -2\pi$

$$\frac{2}{\pi n^2}\left(f'(\pi)\cos(n\pi)\right) + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt =$$

$$= -\frac{4}{n^2}(-1)^n + \frac{4}{n^2}\underbrace{\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_n = -\frac{4}{n^2}(-1)^n}$$

DUNQUE
$$f(t) = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi)$$

la convergenza è puntuale (a causa del teorema †) MA se guardo i coeff. vedo che $|a_n| \leq \frac{\text{cost}}{n^2} \Rightarrow$ la conv. è UNIFORME.

Metto $t = 0 \Rightarrow f(0) = \pi^2$ DUNQUE

$$\pi^2 = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{n^2} = \left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{3}\pi^2 = -\frac{\pi^2}{12}$$

Mettiamo $t = \pi \Rightarrow f(\pi) = 0$ DUNQUE

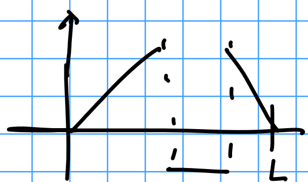
$$0 = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{3}\pi^2\frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$

SVILUPPI IN (SOLI) SENI o (SOLI) COSENI

Prendo $L>0$ e chiamo $\omega_0 = \frac{\pi}{L}$ (non $\frac{2\pi}{L}$!!)

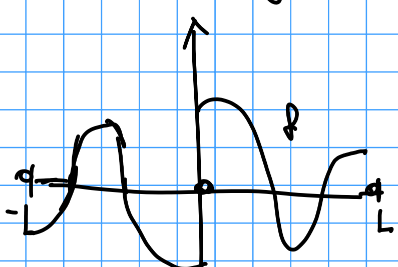
Considero una $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ | regolare a tratti su $[0,L]$



VORREI scrivere $f(x) \overset{?!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 x)$

POSSO RAGIONARE COME SEGUE:

Estendo f a $[-L,0]$ in modo dispari



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{su }]0,L[\\ 0 & \text{se } x = 0,-L,L \\ -f(-x) & \text{su }]-L,0[\end{cases}$$

$\tilde{f}$ è regolare a tratti ed è dispari

Posso estenderla $\tilde{f}$ a tutto $\mathbb{R}$ in modo $2L$ periodico

(ω_0 è la frequenza angolare di $\tilde{f}$)

Sviluppo $\tilde{f}$ secondo Fourier; dato che $\tilde{f}$ è dispari $a_n = 0\ \forall n$

$$b_n = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\underbrace{\tilde{f}(x)\sin(n\omega_0 x)}_{\text{PARI}}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin(n\omega_0 x)$$

A seconda della regolarità di f (di $\tilde f$) dove che la serie

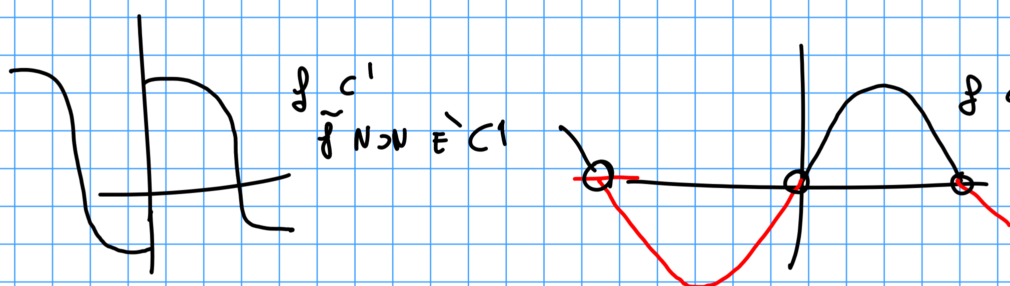
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 x) = \tilde f(x)$$

Se prendo x in $[0,L]$ $\Rightarrow$ $\tilde f(x) = f$ e quindi ho

$$(\star) \qquad f(x) \overset{*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_0 x) \qquad \text{su } [0,L]$$

PUNTUALE se f è reg. a tratti, UNIF. se $\tilde f$ è C^1 (cioè f è C^1 e $f(0)=0=f(L)$)

dove $u_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\omega_0 x)$



TEOR. (Tipo 1) Se f è regolare a tratti su $[0,L]$ la formula $(\star)$ vale in senso puntuale.

Se f è C^1 e $f(0) = f(L) = 0$ $\Rightarrow$ la $(\star)$ vale in senso uniforme.

Teorema (tipo 2) Se (u_n) è una succ di numeri reali e se considero

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_0 x) \qquad (\omega_0 L = \pi)$$

- Se $\sum_{1}^{\infty} |u_n| < +\infty$ $\Rightarrow$ esiste $f(t)$ = SOMMA UNIFORME DI su $[0,L]$

  e vale $f(0) = f(L) = 0$
- Se $\sum_{1}^{\infty} |u_n| n^k < +\infty$ esiste f = somma della serie,

  f è di classe C^k, $f^{(k)}(x) = \sum_{1}^{\infty} u_n \frac{d^k}{dx^k} \sin(n\omega_0 x)$

e vale che $f^{(2m)}(0) = f^{(2m)}(L) = 0$ se $2m \leq K$

$f^{(2m+1)}(0) = - f^{(2m+1)}(L)$ se $2m+1 \leq K$

$\#$