Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 46 23/03/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

La lezione di domani SALTA. Recupero mercoledì 31 ore 8.30

Parentesi nel compito

$$V = \{ xyz - e^{x-1} = 0 \, , \quad x + 1 - y - z = 0 \}$$

$$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz - e^{x-1} \\ x+1-y-z \end{pmatrix} \qquad P = (1,1,1)$$

$$J_G = \begin{bmatrix} yz - e^{x-1}, & xz, & xy \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_G(P) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

OK $\quad \dfrac{\partial G}{\partial(x y)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det = -1 \neq 0 \qquad \left(\dfrac{\partial G}{\partial(x y)}\right)^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

OK $\quad \dfrac{\partial G}{\partial(x z)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det = -1 \neq 0$

NO $\quad \dfrac{\partial G}{\partial(y z)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det = 0 \qquad$ NON SI ESPLICITANO $y(x)$ $z(x)$

Posso esplicitare $X(z)$ e $Y(z)$ $\Rightarrow$ trovo la curva

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), t) \qquad t \simeq 1$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial z} = -\frac{\partial G}{\partial(x,y)}(P)^{-1}\frac{\partial G}{\partial z} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma'(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ASPETTATEVI UN AGGIORNAMENTO DEI RISULTATI

Serie di Fourier Complessa

Data f T-periodica da $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, posto $\omega = \frac{2\pi}{T}$

considero $\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

e la serie di Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$

$$\left(\text{intesa come} \quad c_0 + \sum_{1}^{\infty} \sim + \sum_{-\infty}^{-1} \sim\right)$$

<u>Teorema</u> Se f è regolare a tratti $\Rightarrow$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = \frac{\overbrace{\lim_{\tau\to t^+} f(\tau)}^{f(t^+)} + \overbrace{\lim_{\tau\to t^-} f(\tau)}^{f(t^-)}}{2}$$

(PUNTUALMENTE)

<u>Teorema</u> Se f è C^1 $\Rightarrow$ la convergenza è uniforme.

<u>PROPRIETÀ DEI c_n</u>

- $c_{-n}(f) = c_n(\bar{f})$. Se f è reale $c_{-n} = \overline{c_n}$
- Se f è pari $\boxed{c_{-n} = c_n}$, infatti

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i(-n)\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{in\omega t}\, dt$$

(cambio t in $-t$) $= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{T/2}^{-T/2} f(-t)\, e^{-in\omega t}(-dt) =$

(f pari) $= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t} = c_n$

- Se f è dispari $\boxed{c_{-n} = -c_n}$

(come nel caso pari con l'unica differenza $f(-t) = -f(t)$)

IN PARTICOLARE

- f è reale pari $\Rightarrow$ c_n sono reali pari ($c_{-n} = c_n$)

$\overline{c_n} = c_{-n} = c_n$

- f è reale dispari $\Rightarrow$ c_n dispari e sono immaginari puri

$\overline{c_n} = c_{-n} = -c_n$ $\qquad z = -\bar{z} \Leftrightarrow z = ib \quad b \in \mathbb{R}$

$a + ib = -(a - ib) = -a + ib \Leftrightarrow a = 0$

TORNIAMO AL CASO $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodica

Se (in qualche senso)

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega t} =$$

$$= \underbrace{c_0}_{\text{è reale}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{2\,\mathrm{Re}\left(c_n e^{in\omega t}\right)}_{\text{è reale}}$$ $\leftarrow$ serie di funzioni reali

$c_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \underset{\mathbb{R}}{f(t)}\,dt$

Supponiamo che $c_n = \alpha_n + i\beta_n$. Allora

$c_0 = \alpha_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$

$$2\,\mathrm{Re}\left((\alpha_n + i\beta_n)(\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t))\right) =$$
$$2\alpha_n \cos(n\omega t) - 2\beta_n \sin(n\omega t)$$

dove

$$\alpha_n = \mathrm{Re}\, c_n = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt\right) =$$
$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, \mathrm{Re}\left(\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)\right) dt\right)$$

$-t$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\, dt$$

$$\beta_n = \mathrm{Im}\, c_n = -\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\, dt$$

$\Rightarrow$ se definisco $a_n = 2\alpha_n$ e $-2\beta_n$ trovo

(*)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Serie di F. reale

dove
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$$

e x $n \geq 1$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\, dt$$

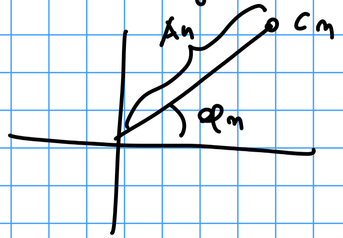
coeff di Fourier reali

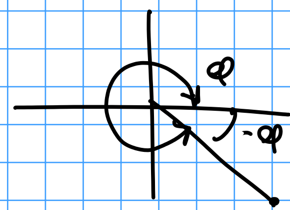
Teorema se f è reale, T periodica e regolare a tratti la forma (*) vale puntualmente, se al posto di f metto

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

OSS. I coeff. c_n hanno un significato di AMPIEZZA/FASE:

Scriviamo $\boxed{c_n = A_n e^{i\varphi_n}}$ dove $A_n \geq 0$ (è il modulo di c_n) e $\varphi_n \in \mathbb{R}$ è un argoment (sto scrivendo c_n in forma polare)





Se dunque $c_n = A_n e^{i\varphi_n}$ allora

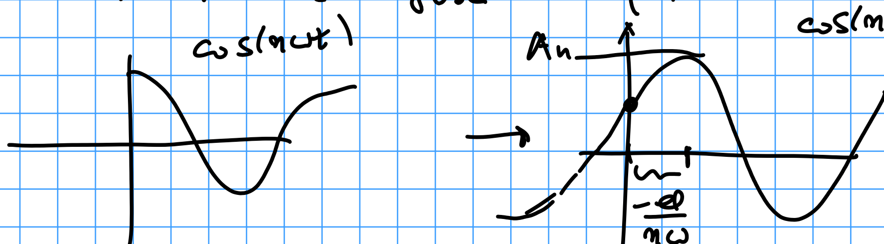
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-in\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\Big(\overbrace{c_n}^{A_n e^{i\varphi_n}} e^{in\omega t}\Big) =$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\, A_n e^{in\omega t + i\varphi_n} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

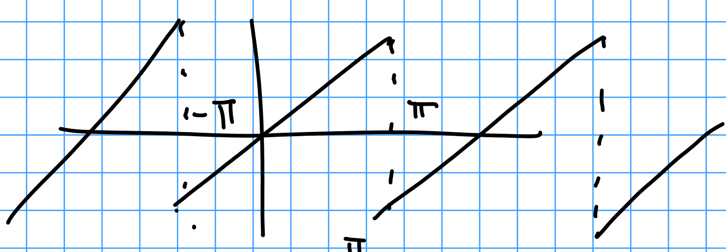
Di nuovo vedo f come sovrapposizione di (infiniti) segnali periodici di periodo $\frac{T}{n}$ (frequenza angolare $n\omega$).

Stavolta la componente n-esima ha ampiezza $2A_n$ $= 2\|c_n\|$ e "fase" φ_n

$$\cos(n\omega t + \varphi) = \cos\left(n\omega\left(t + \frac{\varphi}{n\omega}\right)\right)$$



ESEMPIO (dente di sega)



$f(t) = t \quad -\pi \le t < \pi$

$$\underset{n \neq 0}{c_n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t\, e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi i n}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, dt}_{=0}$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{i}{n}\Big(\underbrace{\pi e^{-in\pi}+\pi e^{in\pi}}_{=\pi(-1)^n}\Big)=\frac{(-1)^n i}{n}$$

$c_0 = 0$

<u>NOTA</u> f è reale dispari $\Rightarrow$ c_n immaginari puri dispari

Nella forma reale $\Rightarrow$ $a_n = 0$ $\quad b_n = -2\,\mathrm{Im}\, c_n = \dfrac{-2(-1)^n}{n}$

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-1)^n}{n}\sin(nt) \qquad \text{se } t\neq \pi+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

(convergenza puntuale)

(la serie mi dà zero se $t=\pi+2k\pi$)

Calcoliamo la serie in $t=\frac{\pi}{2}$. Allora $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$ DUNQUE

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-1)^n}{n}\sin(n\pi/2) = (\text{serie})$$

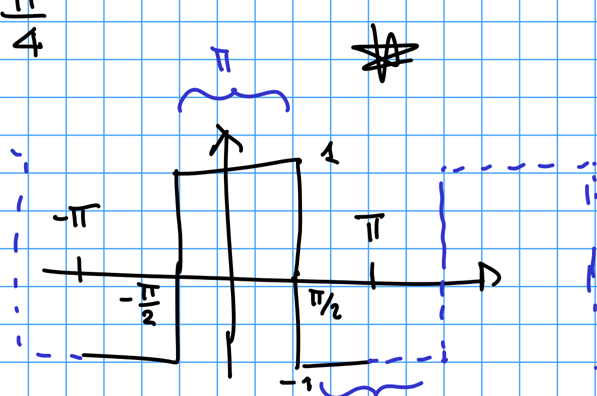
$$\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)=\begin{cases}0 & \text{se } n \text{ è pari}\\ (-1)^m & \text{se } n=2m+1\end{cases}$$

$$\sin\Big(\frac{2m+1}{2}\pi\Big)=\sin\Big(m\pi+\frac{\pi}{2}\Big)=\underbrace{\sin(m\pi)}_{=0}\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big)+\underbrace{\cos(m\pi)}_{=(-1)^m}\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-2)\overbrace{(-1)^{2m+1}}^{-1}(-1)^m}{2m+1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(-1)^m}{2m+1}$$

DUNQUE $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}=\frac{\pi}{4}$ #

<u>ESEMPIO</u> (onda quadra)



$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < \pi/2 \\ -1 & \text{se } -\pi < t < -\frac{\pi}{2} \text{ o } \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

e poi esteso a tutto $\mathbb{R}$ in modo 2π-periodico

Calcoliamo lo sviluppo in serie di F. . Faccio lo sviluppo reale

OSS. Se f è reale pari $b_n = 0 \ \forall n$ (c_n sono reali)

Se f è reale dispari $a_n = 0 \ \forall n$ (c_n sono immaginari puri)

- $b_n = 0 \ \forall n$ perché si vede che f è pari
- $a_0 = 0$ f ha media nulla (si vede)
- $n \geq 1$ $a_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)\cos(nt)}_{\text{PARI}}\, dt$ $T = 2\pi \quad \omega = 1$

$\left(\begin{array}{c} f \text{ è pari} \\ \cos \text{ è pari}\end{array}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt =$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\sin(nt)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n\pi/2)}{n} + \frac{2}{\pi}\frac{\sin(n\pi/2)}{n} = \frac{4}{n\pi}\sin(n\pi/2) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi} & \text{se } n = 2m+1 \end{cases}$$

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)} \cos(nt)$$

Se metto $t = 0 \Rightarrow f(0^+) = f(0^-) = 1$ TROVO

$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$ che è quanto abbiamo dovuto sopra

PAUSA FINO ALLE 12.42

ALTRO PUNTO DI VISTA: Dato $\omega > 0$ e $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Dato una successione (c_n) in $\mathbb{C}$ considero la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

T-periodica

Posso chiamare una serie di questo tipo "serie trigonometrica complessa"

PROBLEMA Quando la serie sopra converge e che proprietà ha la sua somma.

Teorema Se $\sum_{n=-\infty}^{-\infty} |c_n| < +\infty$ allora la serie trigonometrica

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f(t)$ è CONTINUA ed è T-periodica

Dim Dimostro che la serie è TOTALMENTE CONVERGENTE

In effetti se $f_n(t) = c_n e^{in\omega t}$ allora

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t)| = |c_n| \sup_{t\in\mathbb{R}} \underbrace{|e^{in\omega t}|}_{=1} = |c_n|$$

(modulo complesso $|\ | \ \ |\ |_{\mathbb{R}^2}$)

Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n$ è TOT. CONV. $\Rightarrow$ è UNIF. CONV. #

IDEA: Se i $|c_n|$ sono sommabili $\Rightarrow$ la f è regolare

Teorema (generalizza il precedente) Sia $k \in \mathbb{N}$ ($k=0$ è il caso precedente)

Supponiamo che $\sum_{n=+\infty}^{+\infty} |c_n| n^k < +\infty$ (più k è grande più rapidamente i $|c_n|$ devono tendere a zero)

$\Rightarrow$ posto $f_n = c_n e^{in\omega t}$, la serie delle derivate prima, seconda

... fino alla h-esima sono totalmente (dunque unif.) convergenti

$\Rightarrow$ f è di classe C^h e se $0 \le k \le h$

$$f^{(k)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^{(k)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (in\omega)^k e^{in\omega t}$$

<u>Dim</u> Come nel caso di prima volta

$$\| f_n^{(k)} \|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} | f_n^{(k)}(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} | c_n (in\omega)^k | = |c_n|\omega^k n^k$$

Per ipotesi so che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| n^h < +\infty \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| \omega^k n^k < +\infty$
$\forall\, k \le h$

$\Rightarrow$ TESI.

TUTTO SI TRASFERISCE AL CASO REALE

<u>TEOREMA</u> Siano (a_n) e (b_n) due succ. in $\mathbb{R}$

Considero la "serie trigonometrica"

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad \text{Sia } h \geq 0, \text{ INTERO}$$

Allora se $\sum_1^\infty |a_n| n^h < +\infty$, $\sum_1^\infty |b_n| n^h < +\infty$

(se $h=0$ ho $\sum_1^\infty |a_n| < +\infty$ e $\sum_1^\infty |b_n| < +\infty$) $\Rightarrow$ f è di classe C^h

e $1 \le k \le h$ si ha

$$f^{(k)}(t) \underset{(\text{CONV. UNIF})}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d^k}{dt^k} \cos(n\omega t) + b_n \frac{d^k}{dt^k} \sin(n\omega t)$$

sin e cos alternativamente per $\omega^k n^k$

Se $k=0$ ho semplicemente

$$f(t) \underset{(\text{UNIF.})}{=} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

INOLTRE IN TUTTI I CASI SOPRA (se ho almeno $\sum |c_n| < +\infty$ / $\sum |a_n| < +\infty$ e $\sum |b_n| < +\infty$)

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}$$

$$a_n = \frac{1}{2T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)$$

$$b_n = \frac{1}{2T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

dove f è la somma della serie.

Dim (il caso complesso)

$\sum |c_n| < +\infty \Rightarrow$ so che $f(t) \underset{(unif)}{=} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$

Fisso m in $\mathbb{Z}$. moltiplico per $e^{-im\omega t}$ e integro su $[0,T]$

$$\int_0^T f(t)\, e^{-im\omega t}\,dt = \int_0^T \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}\right) e^{-im\omega t}\,dt$$

$[0T]$ è limitato

DATO CHE LA CONVERGENZA È UNIFORME $\Rightarrow$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \underbrace{\int_0^T e^{in\omega t}\, e^{-im\omega t}\,dt}_{\substack{0 \text{ se } n \neq m \\ T \text{ se } n = m}} = T c_m$$

$$\Rightarrow \quad c_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-im\omega t}\,dt$$

#

Come conseguenza posso dimostrare che, se f è di classe C^2 $\Rightarrow$ la serie di Fourier di f converge uniformemente (AVEVO SCRITTO CHE DICE che basta f C^1. Qui lo dimostro nel caso C^1)

DIM. f è C^2. Allora so che $f(t) \underset{(PUNTUALE)}{=} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$

f è T-periodica ($\Rightarrow f'$ e f'' sono T periodiche) dove $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt =$ (per parti)

$$\frac{1}{T}\underbrace{\left[f(t)\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_0^T}_{\substack{=0 \text{ perché} \\ \text{tutto è periodico di} \\ \text{periodo } T}} + \frac{1}{T}\frac{1}{n\omega i}\int_0^T f'(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \quad \text{(per parti)}$$

$$\frac{1}{T}\frac{1}{n\omega i}\underbrace{\left[f'(t)\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_0^T}_{=0 \text{ (come sopra)}} - \frac{1}{T}\frac{1}{n^2\omega^2}\int_0^T f''(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

Dunque $c_n = -\frac{1}{T}\frac{1}{n^2\omega^2}\int_0^T f''(t)\underbrace{e^{-in\omega t}}_{\text{ha modulo } 1}\, dt \Rightarrow$

$$|c_n| \le \frac{1}{T}\frac{1}{n^2\omega^2}\int_0^T |f''(t)|\, dt = \frac{K}{n^2} \quad \text{per } K \ge 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| \le |c_0| + 2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K}{n^2}}_{\text{serie convergente}} < +\infty$$

$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ converge unif (a f perché avevo in ipotesi la conv. puntuale a f)