Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 45   22/03/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Sol. di eq. diff. "per serie (di potenze)"

ALTRO ESEMPIO (non omogeneo)

$$x y'' - 2y' - y = x^2$$

Eq. diff. LINEARE, del II° ORDINE, NON OMOGENEA, NON IN FORMA NORMALE (VICINO A ZERO), in quanto il coefficiente di y'', (che è x), si annulla in $x=0$.

Cerco y del tipo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (con a_n da determinare)

Se y è fatta così (con raggio $R>0$) $\Rightarrow$ $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$

se $n=0$ il coeff. è 0

cambio di indici

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1) x^n$$

($n=1$ / $n=0$) perché i rispettivi coefficienti sono nulli

($n=0$)

Se calcolo $x y'' - 2y' - y = x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^{n-1}$

$$- 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_{n+1}(n+1)n - 2a_{n+1}(n+1) - a_n\Big)x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_{n+1}(n+1)(n-2) - a_n\Big)x^n$$

se il termine noto fosse $2x + 4x^3 + 5x^5$ $\Rightarrow b_1 = 2 \quad b_3 = 4 \quad b_5 = 5$ e gli altri sono 0

se il termine fosse e^x $\Rightarrow b_n = \frac{1}{n!}$

Notiamo che il termine noto $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dove $b_n = \begin{cases} 1 & n=2 \\ 0 & n\neq 2 \end{cases}$

DUNQUE, se impongo che valga l'equazione $\Rightarrow$

(R) $\qquad a_{n+1}(n+1)(n-2) - a_n = b_n = \begin{cases} 1 & n=2 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$

si annulla per $n=2$

se metto $n=2$ in (R) $\Rightarrow a_3 \cdot 3 \cdot 0 - a_2 = b_2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$

se metto $n=1$ in (R) $\Rightarrow a_2(2)(-1) - a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

se metto $n=0$ in (R) $\Rightarrow a_1(1)(-2) - a_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$

se metto $n \geq 3$ in (R) posso scrivere:

(R') $\qquad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(n+1)(n-2)} \qquad \forall n \geq 3$

NON HO NESSUNA CONDIZIONE su a_3. FISSATO a_3 tutti gli a_n con $n \geq 4$ sono determinati da (R'). Se IMPONGO $a_3 = 1$ $\Rightarrow$ trovo tutti gli a_n con $n \geq 4$

Chiamo $\hat{a}_n$ i termini che escono da (R') mettendo $\hat{a}_3 = 1$

Allora se a_3 è arbitrario $\Rightarrow$ $a_n = a_3 \hat{a}_n$ (per linearità uso l'INDUZIONE)

$\Rightarrow$ la soluzione generale

$$y(x) = -4 + 2x - x^2 + a_3 \sum_{n=3}^{\infty} \hat{a}_n x^n$$

NOTARE CHE LA SERIE SCRITTA SOPRA HA RAGGIO ∞

perché $\dfrac{\hat{a}_{n+1}}{\hat{a}_n} = \dfrac{1}{(n+1)(n-2)} \longrightarrow 0$ $\left(R = \dfrac{1}{0} = +\infty \right)$

DALLA SOLUZIONE VEDO CHE:

- IL PROBLEMA NON HA SOLUZIONI se chiedo $y(0) = 0$

qualunque soluzione vale -4 in $x = 0$

ANZI se y è soluzione $y(0) = -4$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -2$

- Se chiedessi quante soluzioni esistono con $y(0) = -4$

$\Rightarrow$ INFINITE (tante quanti i valori di a_3 !!)

ANZI CE NE SONO INFINITE con $y(0) = -4$, $y'(0) = 2$

$y''(0) = -2$

- IN REALTÀ OTTENGO UNA E UNA SOLA SOLUZIONE

SE IMPONGO $y'''(0) = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Questa soluzione la trovo con $a_3 = \dfrac{\alpha}{3!} = \dfrac{\alpha}{6}$

$\left(a_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!} \right)$

- Se impongo, per esempio $y'''(0) = 6 \Rightarrow a_3 = 1$

Posso chiedere chi è $y^{(5)}(0)$?! . USO (R')

che mi dice

$a_4 = \dfrac{a_3}{(3+1)(3-2)} = \dfrac{1}{4}$ $\left(a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(n+1)(n-2)} \quad \forall n \geq 3 \right)$

$a_5 = \dfrac{a_4}{5 \cdot 2} = \dfrac{1}{40} = \dfrac{f^{(5)}(0)}{5!} \Leftrightarrow f^{(5)}(0) = \dfrac{5!}{40} = \dfrac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{4}}$

$\Rightarrow \boxed{f^{(5)}(0) = 3}$

SERIE DI FOURIER

Mi metto tra le funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (poi faremo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) PERIODICHE.

RICORDO che f è periodica di periodo $T > 0$ se
$$f(t+T) = f(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Per esempio $\sin(4t)$ è π-periodica, perché
$$\sin(4(t+\pi)) = \sin(4t + 4\pi) =$$
$$\sin(4t + 2\pi + 2\pi) = \sin(4t) \qquad (\sin(t+2\pi) = \sin(t))$$

IN REALTÀ $\sin(4t)$ è anche periodica di periodo $\frac{\pi}{2}$
$$\sin\left(4\left(t + \tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(4t + 2\pi) = \sin(4t)$$

si può vedere che $\frac{\pi}{2}$ è "il minimo periodo"

IN GENERALE IL PERIODO NON È UNICO; se f è T-periodica $\Rightarrow$ f è $k \cdot T$ periodica $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $k \geq 1$

Ci mettiamo dunque tra le funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodiche di periodo $T > 0$ (FISSATO). Definisco $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ $(T\omega = 2\pi)$

(ω è la "frequenza angolare").

Data una f come sopra vorrei scrivere $\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}}$

(la "doppia serie" significa $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t}$, dove lim può essere inteso puntualmente o uniformemente)

L'IDEA è che le funzioni $e_n(t) := e^{in\omega t}$ sono "i prototipi" delle funzioni periodiche.

<u>NOTA</u> $e^{in\omega t} = \cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)$ sono

T periodiche. In effetti se $\omega = 1$ sono periodiche di periodiche di periodo $T = 2\pi$

Mi chiedo se le funzioni $e_n(t) = e^{in\omega t}$ sono "UNA BASE" per le funzioni periodiche di periodo T.

I PROBLEMI SONO:

(a) capire chi sono i c_n

(b) una volta trovati i c_n, dire se f è effettivamente eguale alla serie scritta sopra, e in che senso (puntuale? unif.?)

OSS (preliminare) INDICHIAMO $e_n(t) = e^{in\omega t}$

Siano $n, m \in \mathbb{Z}$ allora

$$(*) \quad \boxed{\int_0^T e_n(t)\,\overline{e_m(t)}\,dt = \begin{cases} T & \text{se } n = m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}}$$

IN EFFETTI $\displaystyle\int_0^T e_n \overline{e_m}\,dt = \int_0^T e^{in\omega t}\,\overline{e^{im\omega t}}\,dt =$

$$\int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t}\,dt = \int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\,dt = \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$$

(1) $n = m$ $\displaystyle = \int_0^T e^0\,dt = T$

(2) $n \neq m$ $\displaystyle = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega}\right]_0^T = 0$ dato che $e^{ik\omega T}$ è T-periodica

$(k = n - m \neq 0)$

ADESSO POSSO INDIVIDUARE I c_n

Ammettiamo che $\displaystyle f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n(t)$

Fissiamo $k \in \mathbb{Z}$ e moltiplichiamo per $\overline{e_k(t)}$, e poi integriamo tra 0 e T

$$\int_0^T f(t)\,\overline{e_k(t)}\,dt = \int_0^T \left(\overline{e_k(t)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n(t)\right) dt =$$

$$\int_0^T \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e_m(t) \overline{e_k(t)} \right) dt$$ = (ammettiamo che si possa fare)

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \underbrace{\int_0^T e_m(t) \overline{e_k(t)} \, dt}_{\substack{0 \text{ se } m \neq k \\ T \text{ se } m = k}} = c_k \cdot T$$

<u>DUNQUE</u> (se tutto torna)

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt}$$

<u>Chiamo</u> i c_k "coefficienti di Fourier complessi di f"

<u>OSS.</u> Se $t_0 \in \mathbb{R}$ posso scrivere

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-ik\omega t}$$

(a causa della periodicità dell'integrando: se f_1 è T-periodica dato un qualunque intervallo $[a,b]$ con $b-a = T \Rightarrow$)

$$\int_a^b f_1(t) dt = \int_0^T f_1(t) dt \qquad (\text{SI VEDE} \ldots)$$

Per esempio
$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3}{4}T} f(t) e^{-ik\omega t} dt \ldots$$

$$\underbrace{f = \sum c_m e^{im\omega t}}_{\text{CONVERGE?!}} \overset{?!}{\Longleftarrow} \quad c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-im\omega t}$$

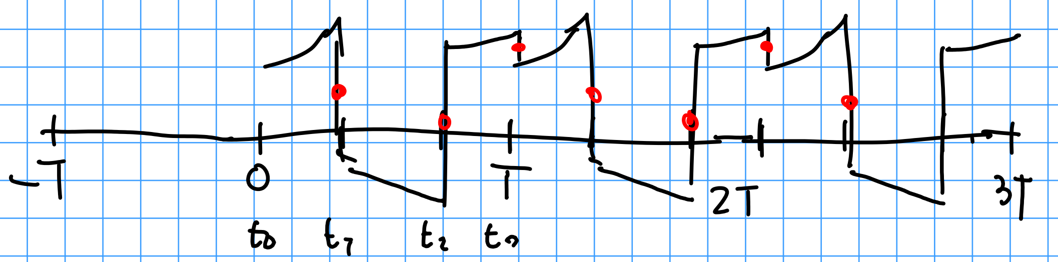
PAUSA FINO ALLE 9.45

<u>Chiamo</u> "serie di Fourier complessa di f" la serie $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\omega t}$ dove c_m sono quelli scritti sopra

TEOREMA Supponiamo f "REGOLARE A TRATTI" cioè

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T periodica ed esistono $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$ tali che su ogni sottointervallo $]t_{i-1}, t_i[$ $(i = 1 \dots k)$ la f è C^1 e f' è limitata.

Questa definizione NON IMPLICA f continua nei punti $t_0 \dots t_k$ (e nei loro traslati $t_i + mT$ $m \in \mathbb{Z}$)



⇐ ESEMPIO DI funzione regolare a tratti

PERÒ DEVONO ESISTERE $\lim_{t \to t_i^+} f(t)$ $\lim_{t \to t_i^-} f(t)$ (dato che f' è limitata)

ALLORA LA SERIE DI FOURIER DI f CONVERGE PUNTUALMENTE A

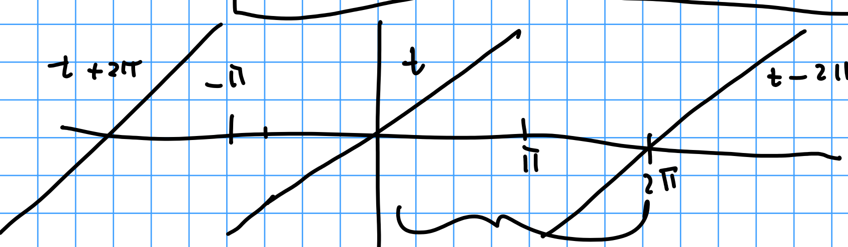
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{\tau \to t^+} f(\tau) + \lim_{\tau \to t^-} f(\tau)\right) \quad \left(= f(t) \text{ se } t \neq t_i + mT\right)$$

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e_m(t)\right)$$

PER ESEMPIO POSSO CONSIDERARE

$$\boxed{f(t) = t \quad \text{per } t \in]-\pi, \pi[}$$

PERIODICIZZATA DI PERIODO 2π



È REGOLARE A TRATTI (MA NON È CONTINUA)

IN $t = \pi + 2k\pi$ ho $\lim_{\tau \to t^-} f(\tau) = \pi$ $\lim_{\tau \to t^+} f(\tau) = -\pi$

Per questo f la serie di Fourier converge puntualmente

$$e \begin{cases} f(t) & \text{se } t \neq \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se } t = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Posso anche calcolare i c_n e vedere chi è la serie:

QUI $T = 2\pi \Rightarrow \omega = 1$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t\, e^{-int\,dt}\, dt = \text{per parti}$$

$$\left[\frac{1}{2\pi} t \frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i}{n} \left(\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}\right) - \frac{i}{2\pi n} \Big(\underbrace{e^{-in\pi} - e^{in\pi}}_{=0}\Big) =$$

$$\frac{i}{2n}\, 2 e^{in\pi} - 0$$

(perché e^{int} è 2π-periodica)

$$\boxed{\frac{i}{n}(-1)^n = c_n}$$

DUNQUE $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{n}(-1)^n e^{-int} = t \quad -\pi < t < \pi$

$\Rightarrow 0 \quad t = -\pi,\ t = \pi$

(e poi i valori periodicizzati)

OSS. Nel teorema NON si può ottenere la conv. uniforme dato che f può non essere continua (se avessi conv. unif. $\Rightarrow f$ dovrebbe essere continua, dato che i termini $e_n(t) = e^{in\omega t}$ sono continui in t)

SI PUÒ VEDERE CHE, ANCHE NEL CASO DI f

CONTINUA, PUÒ NON ESSERCI CONV. UNIF.
ADDIRITTURA si può vedere che $\exists f$ CONTINUE (ma non regolari a tratti) per cui la serie di Fourier **non** converge a f in molti punti

---

TEOREMA Se f è C^1 su $\mathbb{R}$ (T-periodica)
$\Rightarrow$ la convergenza è uniforme.
(ci fermiamo).

Versione reale Supponiamo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Allora si ha

$$c_{-m} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{imωt}\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, \overline{e^{-imωt}}\, dt =$$

$$(f \text{ reale}) = \overline{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-imωt}} = \overline{c_m}$$

$$\boxed{f \text{ reale} \Rightarrow c_{-m} = \overline{c_m}}$$ (VALE ANCHE $\Leftarrow$)

Allora se (in qualche senso)

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m e^{imωt} = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{imωt} + \sum_{m=-1}^{-\infty} c_m e^{imωt}$$

$$c_0 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{imωt} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} e^{-imωt} =$$

(cambio di indice)

$$c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{imωt} + c_{-m} e^{-imωt} =$$

$$c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{imωt} + \overline{c_m e^{imωt}} = c_0 + \overbrace{\sum_{m=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}(c_m e^{imωt})}^{\in \mathbb{R}}$$

Se f è reale $\Rightarrow$ $f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(c_n e^{in\omega t}\right)$

$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \in \mathbb{R}$

CONTINUIAMO DOMANI