Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 44 17/03/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE

$$(E) \qquad a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = f(x)$$

dove a, b, c, f sono funzioni continue, definite per $x \in \mathbb{R}$

Questa è un'eq. diff. (ORDINARIA) del secondo ordine, lineare. Se $f = 0$ (E) è omogenea.
Se a, b, c non dipendono da x l'eq. è "a coefficienti costanti" e ci sono delle formule risolutive.

IN REALTÀ ci vuole $a \neq 0$ se no l'eq. diventa di ordine ≤ 1

IN GENERALE si dice che (E) è "in forma normale"
se $a(x) \neq 0$ per ogni x. In questo caso posso dividere per a e riscrivere l'eq.

$$(E) \qquad y'' + \frac{b(x)}{a(x)}\, y' + \frac{c(x)}{a(x)}\, y = \frac{f(x)}{a(x)}$$

dunque il termine di secondo ordine è il solo y''.

TEOREMA 1 Se l'eq. è in forma normale $\Rightarrow \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$

$\forall\, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ esiste unico y soluzione di (E) tale che
$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1 \qquad$ (y definita su $\mathbb{R}$)

NON CHIEDO CHE $a(x) \neq 0 \ \forall x$

TEOREMA 2 Se a, b, c, f sono esprimibili come serie di potenze $\left(a(x) = \sum \alpha_n x^n, \ b(x) = \sum \beta_n x^n \ \ldots \right)$

allora ogni soluzione di (E) è del tipo $y(x) = \sum \gamma_n x^n$

PER ESEMPIO se a, b, c ed f sono polinomi in x

ALLORA POSSO CERCARE LE SOL. DI (E) come serie di potenze (il teorema mi dice che non ci sono altre soluzioni).

Consideriamo l'equazione:

$$\textcircled{\star} \qquad \boxed{x y'' - y' - y = 0}$$

L'eq. è del II ordine, lineare, omogenea, NON È IN FORMA NORMALE perché $a(x) = x$ si annulla in $x=0$. Se divido per x

$$y'' - \frac{y'}{x} - \frac{y}{x} = 0$$

Scritta così vale il teorema 1 in $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow$ se $x_0 \neq 0$ esiste la sol. con $y'(x_0) = y_1 \quad y(x_0) = y_0$, definita se $x \neq 0$ (sarebbe ragionevole dire che, se $x_0 > 0$, la sol. esiste nelle $x > 0$).

IO INVECE VOGLIO RISOLVERE L'EQ VICINO A ZERO

Per il teorema 2 le (eventuali) soluzioni sono serie di potenze in x $\Rightarrow$ cerco y della forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{con } (a_n) \text{ da determinare}$$

Se y è di questa forma $\Rightarrow$ (derivo sotto il segno di serie e poi prendo $n-1$ come indice)

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(n) x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1) x^n}$$

SE IMPONGO CHE VALGA L'EQUAZIONE:

$$0 = x y'' - y' - y = x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(n) x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$$

(anche $n=0$)

$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1} n(n+1) - a_{n+1}(n+1) - a_n \right) x^n$$

nel caso non omog. $\left(= x^2 = \sum b_n x^n \right)$

$\Updownarrow$

(R) $\quad a_{n+1}(n+1)(n-1) = a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Vedo se è possibile trovare a_n che verifichi R; quante (a_n) ci sono, se una tale (a_n) definisce una $y(x)$ con raggio di convergenza.

Se GUARDO R, e metto $n = 1$ trovo

$$a_2 \cdot 2 \cdot 0 = a_1 \Rightarrow a_1 = 0$$

Metto $n = 0 \Rightarrow \quad 0 = a_1 \cdot (1)(-1) = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$.

Dunque se (a_n) verifica R $\Rightarrow \boxed{a_0 = a_1 = 0}$

Prendiamo $n \geq 2$; posso riscrivere (R)

$$(R') \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2-1} \qquad \forall n \geq 2$$

(R') individua tutti gli a_n con $n \geq 3$ se assegno (a piacere) il termine a_2. Lo vedo RAGIONANDO PER INDUZIONE

IN DEFINITIVA $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 \in \mathbb{R}$ è arbitrario e se $n \geq 3$ gli a_n sono tutti determinati univocamente. Posso ANCHE CONSIDERARE $\hat{a}_n$ definiti da

$$(\hat{R}) \begin{cases} \hat{a}_2 = 1 \\ \hat{a}_{n+1} = \dfrac{\hat{a}_n}{n^2-1} \quad n \geq 2 \end{cases}$$ & BEN DEFINITI

e nel caso generale $a_n = a_2 \hat{a}_n$ (per linearità)

VEDIAMO SE RIESCO A CALCOLARE (on

$$L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\hat{a}_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\hat{a}_n} \qquad (\hat{a}_n > 0,\ \text{lo vedo da } \hat{R})$$

Posso usare Cesàro e calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{a}_{n+1}}{\hat{a}_n} \ (= L)$

$$\overset{(\text{uso } R)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\hat{a}_n}{n^2-1} \Big/ \hat{a}_n \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-1} = 0$$

<u>QUINDI</u> la $y(x)$ definita come sopra $\left(y(x) = a_2 \sum_{n=2}^{\infty} \hat{a}_n x^n \right)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ (Raggio di conv. $= \frac{1}{L} = +\infty$)

Per i teoremi di derivazione è chiaro che $y(x)$ risolve l'equazione.

NOTIAMO CHE $y(0) = a_0 = 0$, $y'(0) = a_1 = 0$,

$$y''(0) = a_2 \cdot 2! = 2a_2$$

QUINDI, NON POSSO ASSEGNARE $y(0)$ / $y'(0)$.

Non posso risolvere l'equazione con $y(0)=1$ (o $y'(0)=3$)

VICEVERSA SE IMPONGO $y(0)=0$ $y'(0)=0$ $\Rightarrow$

TROVO INFINITE SOLUZIONI (a_2 è arbitrario)

INDIVIDUO UNIVOCAMENTE LA SOLUZIONE

ASSEGNANDO LA DERIVATA II° in $X=0$

Per esempio se impongo $y''(0)=2$ $\Rightarrow$ $a_2=1$

e quindi

$$y(x)=x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{360}+\frac{x^6}{360\cdot 24}+\dots$$

$a_2=1$, $a_3=\frac{a_2}{2^2-1}=\frac{1}{3}$, $a_4=\frac{a_3}{3^2-1}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{8}$

$a_5=\frac{a_4}{4^2-1}=\frac{1}{24}\,\frac{1}{15}$ $a_6=\frac{a_5}{5^2-1}=\frac{1}{360}\cdot\frac{1}{24}$

UN CASO NON OMOGENEO

$$x\,y''-y'-y=x^2$$

stesso metodo $y(x)=\sum a_n x^n$

con la differenza che ho $f(x)=x^2$. Devo sviluppare f in serie di potenze : $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dove

$$b_n=\begin{cases}0 & \text{se } n\neq 2\\ 1 & \text{se } n=2\end{cases}$$

Ragionando come nel caso omogeneo trovo la rel. ricorsiva

$$(\overline{R})\qquad a_{n+1}(n-1)(n+1)-a_n=b_n \iff$$

$$a_{n+1}(n-1)(n+1)-a_n=1 \quad \text{se } n=2$$
$$=0 \quad \text{se } n\neq 2$$

LA PROSSIMA VOLTA !!