Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 43 16/03/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

SERIE DI POTENZE

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è definita in $]-R,R[$ dove

"il raggio di convergenza" $R := \frac{1}{L}$ con $L = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

IN REALTÀ se mi metto nei complessi ho

$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\quad (a_n \in \mathbb{R})$ è definita in $B(R) = \{|z| < R\}$

dove R è quello di sopra.

- f è di classe C^∞ su $]-R,R[$ e

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ termini}} x^{n-k} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]-R,R[$$

↑

OSS Dalla formula sopra, con $x=0$, ottengo

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)\, 0^{n-k}$$

$= 0$ se $n > k$
$= 1$ se $n = k$

$$= a_k \, k(k-1) \cdots 1 = a_k \, k!$$

IN ALTRI TERMINI:

$$f^{(k)}(0) = k! \, a_k \quad \text{oppure} \quad \boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$$

DUNQUE, se $f = \sum_0^\infty a_n x^n$, gli a_n sono i coeff. di Taylor di f !!! $\Longleftrightarrow$ se $f = \sum_0^\infty a_n x^n$, allora f è "somma della sua serie di Taylor"

IN GENERALE IL VICEVERSA È FALSO.

Esistono funzioni di classe C^∞ tali che

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

in che senso?! PER ESEMPIO $f(x) \neq \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ $\forall x \neq 0$

IDEA DEL CONTROESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

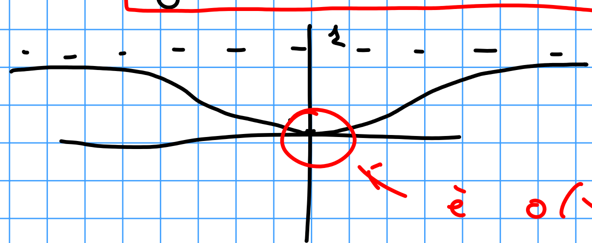
Si vede che $e^{-1/x^2} \to 0$ più rapidamente di x^α $\forall \alpha > 0$

Se ne può ricavare che f è continua, derivabile quanto si vuole e

$$f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)\, e^{-1/x^2}}{x^{k+3}} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

per un opportuno polinomio $P_k(x)$. $\Longrightarrow$

$$\boxed{f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}}$$



è $o(x^\alpha)$ $\forall \alpha > 0$

Questa f dunque ha come serie di Taylor la funzione nulla

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{=0\ \forall n} x^n = 0$$

MA $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$.

Le serie di potenze sono una classe particolare delle funzioni C^{∞}. SI POTREBBERO DARE DELLE CONDIZIONI che garantiscono che una f C^{∞} è somma della sua serie di Taylor (IDEA: È QUELLA DI STIMARE IL RESTO DI LAGRANGE)

Vediamo alcuni esempi concreti

ESEMPIO $\quad f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall x$

$\Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ e quindi la "serie di Taylor" per e^x è $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

POSSO DIRE CHE $\quad e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (per quali x ??)

USO Taylor con resto di Lagrange: Sia $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{e^{\xi_{n,x}} x^{n+1}}{(n+1)!}}_{R_n(x)}$$

per un opportuno $\xi_{n,x}$ compreso tra 0 e x
$(\ |\xi_{n,x}| < |x|\ )$

Ma allora $\quad |R_n(x)| \leq \dfrac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} = e^{|x|} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$n!$ VINCE SU A^n

DUNQUE $e^x = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{x^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ #

DUNQUE "=" vale $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow R = +\infty$

Nota che il fatto che $R=+\infty$ si vede da $\lim_{m\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{m!}}$

(ceso) $= \lim_{m\to\infty} \frac{m!}{(m+1)!} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} = 0 \quad \left(L=0 \quad R=+\infty \right)$

Analogamente si può vedere che

- $\sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2m+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{m} \quad |x|<1$

(~ derivando si ottiene $\frac{1}{1+x} = \sum_{0}^{\infty} (-x)^n$
l'abbiamo vista la volta scorsa con $\ln(1-x)$)

- $(1+x)^\alpha$ = somma della sua serie di Taylor $|x|<1$
  (se $\alpha = -1$ ho la serie geometrica in $-x$)
  $\alpha \in \mathbb{R}$

RIASSUMENDO

Se f è una serie di potenze $\Rightarrow$ f è C^∞ e f è somma della sua serie di Taylor

Se f è C^∞ $\Rightarrow$ Posso scrivere la serie di Taylor per f
NON È DETTO CHE f = somma della serie di Taylor

ESEMPIO Considero

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$ definita sull'INTERVALLO DI CONVERGENZA $]-R, R[$ dove R = raggio di conv.

QUI $R = \frac{1}{L}$ con $L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow R$

Dunque f è definita su $\boxed{]-1, 1[}$ (NON È DEFINITA se $x > 1$ o $x < -1$; NEI PUNTI ± 1 DEVO GUARDARE e vedo che viene $\sum_1^{\infty} n = +\infty$ $(x=1)$ / $\sum_1^{\infty} (-1)^n n$ INDETERMINATA)

Mi chiedo se posso trovare un'espressione esplicita di $f(x)$

Se derivo f trovo $\sum_1^{\infty} n \, n x^{n-1} = \sum_1^{\infty} n^2 x^{n-1}$ NON HO MIGLIORATO...

Allora faccio le primitive $\simeq$

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\simeq 1} x^{n+1}$$

POSSO FARE MEGLIO

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}}_{h(x)} = x\, h(x)$$

$$\int h(x)\,dx = \sum_1^{\infty} n \frac{x^n}{n} + cost. = \sum_1^{\infty} x^n + cost =$$

$\frac{1}{1-x} - 1$

$$\left(\sum_0^{\infty} x^n - 1 + cost \right) = \frac{1}{1-x} + cost$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} + cost.\right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

OSSERVAZIONE $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$; $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$
$= x \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x} = \frac{x-1+1}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$ OPPURE

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + 1 - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1$$

MODO DIRETTO

$$g(x) = \sum x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$g'(x) = \sum n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = f(x) = x\, g'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

per esempio $x = 1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2$$

$$G(x,y) = \ln(1+xy^2) - x \qquad M = \{G(x,y) = 0\}$$

$(0,0) \in M$ OK.

$$x = x(y) \Leftarrow \frac{\partial G}{\partial x}(0,0) = \frac{y^2}{1+xy^2} - 1 \Big|_{(0,0)} = -1$$

$$x'(y) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}(x(y),y)}{\frac{\partial G}{\partial x}(x(y),y)} = -\frac{\frac{2xy}{1+xy^2}}{\frac{y^2}{1+xy^2} - 1} =$$

$$x'(0) = 0$$

$$-\frac{\frac{2xy}{1+xy^2}}{\frac{y^2-1-xy^2}{1+xy^2}} = \frac{2xy}{y^2-1-xy^2}$$

$$x'' = \frac{(2x'y+2x)(y^2-1-xy^2) - 2xy(2y - x'y^2 - 2xy)}{(y^2-1-xy^2)^2}\Bigg|_{y=0} = 0$$

$$\frac{d}{dy} 2xy = 2x'y + 2x$$

COSTRUZIONE DELL'ESPONENZIALE COMPLESSO TRAMITE LE SERIE DI POTENZE

POSSO PARTIRE DA $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

è una serie di potenze in $\mathbb{C}$. f è ben definita se $|z|<R$ dove $R=\frac{1}{L}$ con $L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=0$

QUINDI $R=+\infty$ e $\boxed{f(z) \text{ esiste } \forall z\in\mathbb{C}}$

- $f(0)=\frac{0^0}{0!}=1$
- MOSTRIAMO CHE $f(z+w)=f(z)\cdot f(w)$ ← ⊛

HO BISOGNO DI UN RISULTATO SULLE SERIE

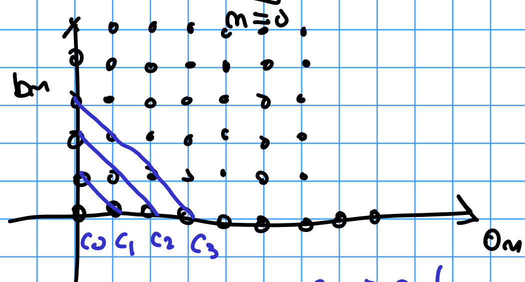
<u>Teorema</u> (di Cauchy sulle serie)

Siano (a_n) e (b_n) due successioni in $\mathbb{C}$ tali che $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|<+\infty$

Per ogni n pongo $c_n:=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$

((c_n) è il "prodotto alla Cauchy" di (a_n) e (b_n))

Allora $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|<+\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)}_{\sum_{n,m=0}^{\infty}a_n b_m}$



$c_0=a_0b_0$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0$, $c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$

⊛ Faccio il prodotto $f(z)f(w)=$

$$\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)}_{f(z)}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\right)}_{f(w)}\overset{(\text{Cauchy})}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}}z^k w^{n-k}\overset{\text{binomio di Newton}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n$$

$$=f(z+w)$$

DUNQUE È PERFETTAMENTE SENSATO DIRE CHE

$$f(z) = \exp(z)$$

- Se $z = x \in \mathbb{R}$ ho $f(x) = e^x$ (l'abbiamo visto prima e si è usato il calcolo della derivata di e^x $\frac{d}{dx} e^x = e^x$)

POSSO ANCHE DIRE SUBITO CHE

$$\frac{d}{dx} f(x) = f(x)$$

USANDO I TEOREMI FATTI SOPRA:

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

$$\boxed{f' = f}$$

POTREI DEFINIRE $e = f(1) = \sum \frac{1}{n!}$

- POSSO ANCHE NOTARE

$$f(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(x)} + i \underbrace{\sum (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(x)}$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

La def $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ è molto utile per il calcolo numerico di e^z / e^x

SOLUZIONE "PER SERIE" di equazioni diff ordinarie

ESEMPIO SEMPLICE $\boxed{(E) \quad y' = 2y}$

(è un'eq. del I° ordine, lineare omogeneo, a coeff. costanti)

Sappiamo che le soluzioni sono:

$$y(x) = y(0)\, e^{2x}$$

VOGLIO TROVARE UN ALTRO METODO:

cerco le soluzioni come serie di potenze, cioè

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{(con gli } a_n \text{ da determinare)}$$

Se tale y esiste (e ha raggio $R>0$) $\Rightarrow$ (derivando per serie)

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$$

prendo $m = n-1$ e poi lo "ribattezzo n"

Se y risolve (E) $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \iff$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1}(n+1) - 2 a_n \right) x^n = 0$$

Riesco a far tornare questa eguaglianza se impongo

$$a_{n+1}(n+1) = 2 a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Updownarrow$$

$$(R) \qquad a_{n+1} = \frac{2 a_n}{(n+1)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vedo che se fisso a_0 (a piacere) la (R) individua tutti gli a_n con $n \geq 1$ (PER IL PRINCIPIO DI INDUZIONE)

a_0 dato $\quad a_1 = \frac{2 a_0}{1} = 2a_0, \quad a_2 = \frac{2 a_1}{2} = \frac{4 a_0}{1 \cdot 2}$

$$a_3 = \frac{2\,a_2}{3} = \frac{8\,a_0}{1\cdot 2\cdot 3} \quad \ldots \quad \Rightarrow \text{congettura} \quad \boxed{a_n = \frac{2^n}{n!}\,a_0}$$

lo verifico per induzione

DUNQUE $\quad a_n = \dfrac{2^n}{n!}\,a_0 \Rightarrow y(x) = a_0 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = a_0 \sum \frac{(2x)^n}{n!}$

$$\Rightarrow y(x) = a_0\, e^{2x} = y(0)\, e^{2x}$$

che è ciò che sapevamo già.

Vedremo però che questo metodo permette di risolvere anche equazioni a coeff dipendenti da x per cui non abbiamo formule risolutive. VEDREMO DOMANI