Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 42 15/03/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$$I = \iint_D \frac{|x^2-y^2|}{1+x^2y^2}\,dx\,d \qquad D = \{ 0 \le x-y \le 1,\ 0 \le xy \le x-y \}$$

$$\xi = x-y \qquad \eta = xy \qquad (\xi,\eta) = \phi(x,y) = (x-y,\ xy)$$

$$J_\phi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{bmatrix} \qquad \det J_\phi = |x+y|$$

$$I = \iint_D \frac{\overbrace{|(x-y)|}^{f(\phi(x,y))}\overbrace{|(x+y)|}^{\det J_\phi(x,y)}}{1+(xy)^2}\,dx\,dy = \iint \frac{(x-y)}{1+(xy)^2}|x+y|\,dx\,dy$$

$$= \iint_D \underbrace{f(x-y,\ xy)}_{f(\phi(x,y))} \underbrace{|\det J_\phi(x,y)|\,dx\,dy}_{= d\xi\,d\eta} \qquad \text{dove } f(\xi,\eta) = \frac{\xi}{1+\eta^2}$$

$$\iint_D f(\phi(Y))\,|\det\phi(Y)|\,dY = \iint_{\phi(D)} f(X)\,dX$$

L'ALTRA VOLTA

$$\text{DUNQUE} \quad I = \iint_{D_1} \frac{\xi}{1+\eta^2}\,d\eta\,d\xi \qquad D_1 = \phi(D) = \{0 \le \xi \le 1 \quad 0 \le \eta \le \xi\}$$

$$= \int_0^1 \left(\xi \int_0^{\xi} \frac{d\eta}{1+\eta^2} \right) d\xi = \int_0^1 \xi \left[\arctan(\eta) \right]_0^{\xi} d\xi =$$

$$\int_0^1 \xi \arctan(\xi)\, d\xi = \left[\frac{\xi^2}{2} \arctan(\xi) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\xi^2\, d\xi}{1+\xi^2} =$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+\xi^2} \right) d\xi = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

SERIE DI POTENZE

Def. Data una successione (a_n) di numeri reali considero la serie $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(è una serie di funzioni in cui $f_n(x) = a_n x^n$ – LA POSSO IMMAGINARE COME UN POLINOMIO DI GRADO ∞)

DOMANDA Per quali x la serie converge e che proprietà ha la somma $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($S(x)$ è definita per le x in cui la serie converge).

Teorema (del raggio di convergenza) Data (a_n) sia

$$L = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$$

($L = \max \lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}$ su tutte le sottosuccessioni a_{n_k}

SE esiste il limite questo coincide con il maxlim)

Definisco $R = \begin{cases} 0 & \text{se } L = +\infty \\ 1/L & \text{se } L \in]0, +\infty[\\ +\infty & \text{se } L = 0 \end{cases}$

$\boxed{R := \text{RAGGIO DI CONVERGENZA}}$

Allora (a) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge puntualmente su $]-R, R[$ (INTERVALLO APERTO)

(b) Se $R' < R$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente su $[-R', R']$

(c) La serie non converge puntualmente su $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$, cioè non converge se $|x| > R$

OSS. • se $R = 0$ la serie non converge in nessun punto TRANNE $x=0$

• se $R = +\infty$ (b) va inteso che per ogni $M > 0$ la serie converge unif. su $[-M, M]$, mentre (c) è vuoto

• Non si dice nulla nei punti $-R$ ed R - se sono finiti

DIM. Dimostro (b) (R deve essere >0) facendo vedere che, se $R' < R$, $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| a_n x^n \|_{\infty, [-R', R']} < +\infty \quad (\text{CONVERGENZA TOTALE SU } [-R', R'])$$

Infatti $\| a_n x^n \|_{\infty, [-R', R']} = \max_{|x| \le R'} |a_n x^n| = |a_n| (R')^n$

devo dim. che $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (R')^n < +\infty$. Applico il criterio della radice (per serie a termini ≥ 0:

se $A_n \ge 0$, $\max\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{A_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n < +\infty$)

IN QUESTO CASO:

$$\max\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n| (R')^n} = \max\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}\, R' = R' \overbrace{\max\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}^{L} = R' L$$

$$= \frac{R'}{R} \quad (\text{se } R < +\infty, \text{ se no trovo } R' \cdot 0 = 0) \quad \underline{\underline{< 1}}$$

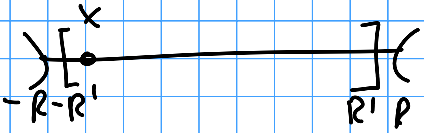
TORNA

Dunque ho la conv. totale su $[-R', R'] \Rightarrow$ CONV. UNIF. SU $[-R', R']$ (e anche puntuale)

(a) Per la (b) ho la conv. puntuale su $[-R', R']$ $\forall R' < R$

$\Rightarrow$ conv. puntuale su $]-R, R[$ (NON LA CONV. UNIF. SU $]-R, R[$)

In effetti se $x \in]-R, R[$ trovo $R' < R$ tale che $x \in [-R', R']$ $\Rightarrow \dots$



(c) Se $|x| > R$ vedo che:

$$\max\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1 \Rightarrow \text{la serie non converge}$$

(VERSIONE NEGATIVA DEL CRIT. RADICE)

perché non può essere $\lim_{n \to \infty} a_n x^n = 0$

DUNQUE DATA (a_n) risulta definita

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{per le } x \in]-R, R[$$

dove R = raggio di convergenza (se $R > 0$!)

<u>Oss.</u> S è <u>CONTINUA</u> su $]-R, R[$

a causa della (b). INFATTI se $x \in]-R, R[$ TROVO $R' < R$ con $x \in]-R', R'[$. Allora che ho convergenza unif. su $[-R', R'] \Rightarrow S$ è continua su $[-R', R'] \Rightarrow S$ è continua in x. #

IN REALTÀ S è $C^{\infty}(]-R, R[)$ (derivabile infinite volte)

<u>Teorema</u> Se (a_n) è una successione tale che

$$R = \frac{1}{\max\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} > 0$$

Allora $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è derivabile in $]-R, R[$

e si ha $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n n x^{n-1}}_{0 \text{ se } n=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$

(N.B. quando scrivo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ intendo che $x^0 = 1 \to$ il termine $a_0 x^0 = a_0$ è il "termine noto")

PIÙ IN GENERALE S è C^{∞} e se $k \geq 1$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k} =$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k}$$

<u>Dim.</u> CASO CON LA DERIVATA PRIMA.

VOGLIO RICONDURMI AI TEOREMI VISTI:

[se $\sum f_n$ conv. pt. e $\sum f_n'$ conv. unif
$\Rightarrow \sum f_n$ è derivabile e ha derivata $\sum f_n'$]

DUNQUE MI BASTA DIM. CHE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ converge unif su $[-R', R']$ per ogni $R' < R$

MA PER QUESTO MI BASTA CALCOLARE IL RAGGIO DI CONVERGENZA $\boxed{R_1}$ DI $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$

$$R_1 = \frac{1}{L^1} \quad \text{con} \quad L_1 = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|(n+1)} =$$

$$\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \sqrt[n]{(n+1)} = (*)$$

<u>SO CHE</u> $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)} = 1 \Rightarrow (*) = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}$

$$= \max\lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}}_{\to L}\Big)^{\overbrace{\frac{n+1}{n}}^{\to 1}} = L$$

DUNQUE $\boxed{R_1 = R}$. Applicando la (b) del Teorema precedente $\Rightarrow$ $\sum a_n n x^{n-1}$ conv. unif. su $[-R', R']$ se $R' < R$ $\Longrightarrow$ TESI!

STESSO DISCORSO per $S^{(k)}$ (BASTA ITERARE k volte il ragionamento)

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{per } x \in]-R, R[$$

è infinitamente derivabile !!

PAUSA FINO ALLE 9.40

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \{x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{\|(x,y)\|}$$

$$\iint_{B(0,1)} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = +\infty = \iint_{\{x^2+y^2 \geq 1\}} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$$

ESEMPI (a) La serie geometrica

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (\text{qui } a_n = 1 \ \forall n)$$

Se calcolo il raggio di conv. $\Rightarrow$ $\sqrt[n]{1} \to 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$

Dunque $G(x)$ è definita su $]-1, 1[$ (e non converge se $x > 1$ o $x < -1$). NEI PUNTI $x=1$, $x=-1$ (CHE NON SONO COPERTI DAL TEOREMA) VEDO CHE la serie NON CONVERGE ($\sum 1^n = \sum 1 = +\infty$, $\sum (-1)^n$ è INDET.)

DI QUESTA SERIE SO TUTTO. INFATTI so che

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } |x|<1 \\ +\infty & \text{se } x>1 \\ \text{NON HA LIM} & \text{se } x\leq -1 \end{cases}$$

$(x \neq 1)$

se $x=1$ $S_n(x) = n+1$

DUNQUE $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ per $-1 < x < 1$

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ qui $a_n = \frac{1}{n}$ $n \geq 1$ $(a_0 = 0)$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$

$\Rightarrow f(x)$ è definito su $]-1,1[$ / non è definito fuori $[-1,1]$

Se guardo i punti estremi $-1, 1$ vedo che

$x=1$ TROVO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (NON CONVERGE IN $x=1$)

$x=-1$ TROVO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ CONVERGE PER LEIBNIZ

QUINDI f è definito su $[-1,1[$

PER QUANTO NE SO f è continua (e C^∞) su $]-1,1[$

NOTIAMO CHE $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ho derivato

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{n}\, x^{n-1}}{\cancel{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m$$

$(m = n-1)$

$$\Rightarrow f'(x) = G(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{se } -1<x<1$$

$$f(x) = -\ln(1-x) + \text{costante}$$

Posso trovare la costante mettendo $x=0$

$f(0) =$ costant , Ma $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0$

(se avessi: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0$!!)

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

FACCIAMO VEDERE che la f è contin. su $[-1,1[$

$\Rightarrow$ ricavo che $f(-1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

DIMOSTRO CHE LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge unif. su $[-1,0]$

Per questo mi serve una stima sulla convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n$

SE SI GUARDA LA DIM. DEL CRITERIO DI LEIBNIZ si vede:

$$S_K = \sum_{n=1}^{K} (-1)^n A_n \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n$$

si vede che (*) $\boxed{|S_K - S| \leq |A_{K+1}|}$

Se ora $x \in [-1,0]$ ho $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |x|^n}{n}$

Per la (*) so che

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{K} \frac{(-1)^n |x|^n}{n} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

DUNQUE (faccio il sup per $x \in [-1,0]$)

$$\underbrace{\sup_{-1 \leq x \leq 0} \left| f(x) - \sum_{n=1}^{K} \frac{(-1)^n |x|^n}{n} \right|}_{\text{def. di conv. unif. su } [-1,0]} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

OSS. IN QUESTO CASO HO TROVATO LA CONV. UNIF. DELLA SERIE SENZA RICORRERE ALLA CONV. TOTALE (CHE VA MALE)

$$\sum_{1}^{\infty} \sup_{-1\le x\le 0} \left\| \frac{(-1)^n |x|^n}{n} \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

HO TROVATO UN ESEMPIO DI SERIE CHE CONVERGE UNIF. MA NON TOTALMENTE

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ è una serie di potenze $\sum a_n x^n$

dove $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ (-1)^k & \text{se } n = 2k \end{cases}$

IN QUESTO CASO

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & n \text{ dispa.} \\ 1 & n \text{ pari} \end{cases} \longrightarrow \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

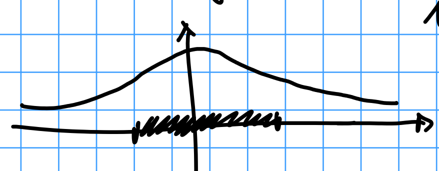
RAGGIO DI CONV. $= 1$.

PERÒ potevamo dire subito che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{se } |x|<1$$

← serie geometrica di ragione $-x^2$

STRANEZZA la funzione $\frac{1}{1+x^2}$ è ben definita su $\mathbb{R}$



$\frac{1}{1+x^2}$

Ma la serie converge solo tra -1 e 1 (esclusi)

$\sum x^n$

$\frac{1}{1-x}$

IN REALTÀ BISOGNEREBBE RAGIONARE IN $\mathbb{C}$:

data (a_n) in $\mathbb{C}$ posso definire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

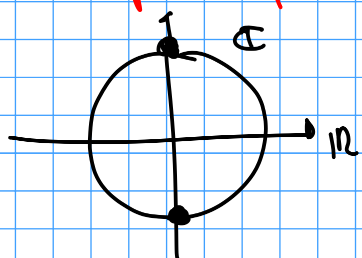
VALE IL TEOREMA DI PRIMA

- f converge puntualmente su $B(0,R) = \{|z|<R\}$

dove $R = \frac{1}{L}$ con $\underline{L = \max\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

- converge unif su $B(0,R')$ $\forall R'<R$

si capisce perché R si chiama "raggio" di conv.



Nel caso di $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$

quando mi metto in $\mathbb{C}$ ho

$$\sum_{0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2} \leftarrow \text{è singolare in } z = \pm i$$