Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 41   10/03/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}} \quad \leftarrow \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$ e sto considerando la serie delle f_n

VISTO: se fisso $\varepsilon > 0$ la serie converge totalmente ($\sum \|f_n\|_\infty < +\infty$) su $A_\varepsilon = \{x \text{ con } |x| \geq \varepsilon\} =]-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty[$ $\Rightarrow$ converge unif. su A_ε $\Rightarrow$ $S(x)$ è continua su A_ε.

Dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario $\Rightarrow$ S è continua su ogni $x \neq 0$, cioè S è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

VISTO ANCHE $\lim_{x \to +\infty} S(x) = 0 = \lim_{x \to -\infty} S(x)$ (continuità unif. su A_ε)

Vediamo che S è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($\forall x \neq 0$).

Di nuovo fisso $\varepsilon > 0$ e considero $A_\varepsilon = \{|x| \geq \varepsilon\}$

Voglio dimostrare che $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'\|_{\infty, A_\varepsilon} < +\infty}$ (CONV. TOT. DELLA SERIE DELLE DERIVATE)

SE DIMOSTRO QUESTO $\Longrightarrow$ sia $\sum_1^\infty f_n$, sia $\sum_1^\infty f_n'$ convergono unif. su A_ε $\Rightarrow$ S è derivabile su A_ε e $S' = \sum_1^\infty f_n'$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ ricavo che $S'(x)$ esiste $\forall x \neq 0$

Calcolo le derivate:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \Rightarrow f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

MI SERVE $M_n = \sup\limits_{|x|\geq\varepsilon} \left|\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}\right|$ o una stima di M_n

per poter dire che $\sum M_n < +\infty$. Potrei fare lo studio di f_n' ma è più semplice ragionare come segue:

$$\forall x: \left|\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}\right| \leq \frac{1+n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1}{1+n^2x^2} = \circledast$$

$$-1-n^2x^2 \leq 1-n^2x^2 \leq 1+n^2x^2$$

$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$$

se $|x| \geq \varepsilon \iff x^2 \geq \varepsilon^2$ $\quad \circledast \leq \frac{1}{1+n^2\varepsilon^2}$

DUNQUE

$$\boxed{M_n \leq \frac{1}{1+n^2\varepsilon^2} \leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} M_n < +\infty$$

perché $0 \leq M_n \leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}$

$\Rightarrow$ OTTENGO LA DERIVABILITÀ DI $S(x)$ (se $x \neq 0$)

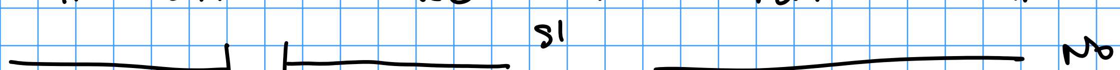
- ITERANDO IL PROCEDIMENTO POTREI DIM. CHE esiste $S^{(k)}(x)$ $\forall k \geq 1$ $\forall x \neq 0$.

- COSA SUCCEDE IN $x=0$.

FACCIO VEDERE CHE $\left[\text{"}\lim\limits_{x\to 0^+} S(x) > 0\text{"}\right]$

(più precisamente mostrerò che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $S(\frac{1}{n}) \geq \varepsilon_0$ per $\forall n \in \mathbb{N}$). SE DIMOSTRO QUESTO

$\Rightarrow$ $S(x)$ è discontinua in $x=0$. IN PARTICOLARE NON HO LA CONVERGENZA UNIFORME SU $\mathbb{R}$



• Prendiamo $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo $S\left(\frac{1}{n}\right)$

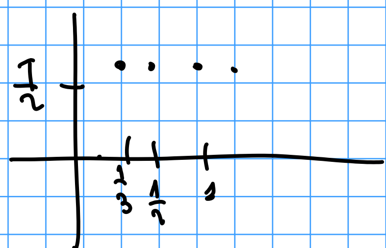
$$S\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1/n}{1+\frac{m^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2} \geq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}$$

$$\left(m \leq n \Rightarrow \frac{m}{n} \leq 1 \Rightarrow 1+\frac{m^2}{n^2} \leq 2\right) \Rightarrow S\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{1}^{n} 1 = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

DUNQUE $S\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

QUESTO ESCLUDE CHE $\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0$



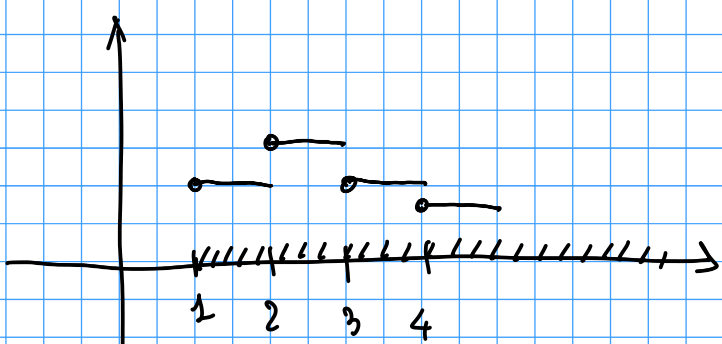
IN REALTÀ (IN QUESTO CASO) POSSO CALCOLARE

$$\lim_{x\to 0^+} S(x)$$

Ricordo che, dato (a_n) successione in $\mathbb{R}$, (FATTO GENERALE)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_1^{+\infty} g(x)\,dx$$

dove g è definita come segue:



$g(x) = a_n$ se $n \leq x < n+1$

$g(x) = a_n$ se $[x] = n$

$$\boxed{g(x) = a_{[x]}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_1^{+\infty} a_{[x]}\,dx$$

Nel nostro caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x}{1+n^2x^2}}_{a_n} = \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+[y]^2x^2}\,dy .$$

$(x>0)$

$$\Big([y] \le y < [y]+1 \iff y-1 < [y] \le y \Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2y^2}\,dy \le \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+[y]^2x^2}\,dy \le \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+(y-1)^2x^2}\,dy \overset{\nearrow}{=} \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+y^2x^2}\,dy$$

$y-1 = z \quad dy = dz$

conviene usare il cambio di variabile $xy = t \Rightarrow x\,dy = dt$

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \le S(x) \le \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

se $x \to 0^+$ (DUE CARABINIERI) $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{x\to 0^+} S(x) = \frac{\pi}{2}}$

Con le stesse idee studiamo:

$$\sum \frac{x}{n^2+x^2} = S(x)$$

MOSTRARE CHE:

- $S(x)$ esiste (la serie converge) $\forall x \in \mathbb{R}$
- $S(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

  Mostrare la convergenza totale su $[-M, M]$ per ogni $M>0$
- $S(x)$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$
- <u>NON È VERO</u> che $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$ / $\lim_{x\to-\infty} S(x) = 0$
- Cosa se ne deduce sulla convergenza uniforme su $\mathbb{R}$??