Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 40 09/03/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

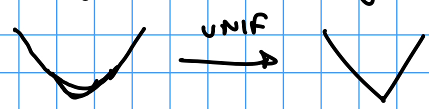
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Problema dello scambio tra limiti di funzioni e derivate.

VISTO In generale NON VALE: $f_n \xrightarrow{?} f \Rightarrow f_n' \xrightarrow{?} f'$

Nell'esempio di ieri f_n sono derivabili $f_n \xrightarrow{UNIF} f$

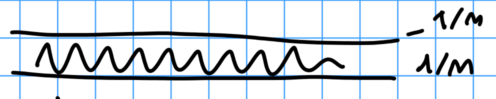
MA f non è derivabile



Altro esempio $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2 x)}{n}$ $n \in \mathbb{N}$

f_n sono tutte derivabili e $|f_n(x)| \le \dfrac{1}{n} \Rightarrow f_n \xrightarrow{UNIF} 0$ (su $\mathbb{R}$)

DUNQUE $f_n \xrightarrow{UNIF} f$ f è derivabile



PERÒ se calcolo $f_n'(x) = \dfrac{\cos(n^2 x)}{n} \cdot n^2 = n \cos(n^2 x)$

f_n' NON POSSONO TENDERE A ZERO UNIF. su $\mathbb{R}$ perché

$\sup_{x \in \mathbb{R}} f_n'(x) = n \to \infty$ (non tende a zero)

DUNQUE nonostante $f_n \xrightarrow{UNIF} f$, f derivabile
NON È VERO CHE $f_n' \to f'$

TEOREMA (Scambio tra limiti e derivate) $(a<b \in \mathbb{R})$

Supponiamo $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1

$g, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che:

(a) $f_n \to f$ PUNTUALMENTE su $[a,b]$

(b) $f_n' \to g$ UNIFORMEMENTE su $[a,b]$ ($\Rightarrow g$ è continua)

ALLORA f è C^1, $g = f'$, $f_n \to f$ UNIF.

Dim. Ricordo il Teor. Fond. Calcolo Integrale:

$$(\text{TFCI}) \left[\begin{array}{l} f \text{ è } C^1 \text{ su } [a,b] \\ \text{e } g = f' \end{array} \iff \begin{array}{l} g \text{ è continua e} \\ f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt \\ \forall x \in [a,b] \end{array} \right]$$

Per ipotesi f_n sono C^1 $\Rightarrow$. $\forall x \in [a,b]$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt \qquad (\text{TFCI} \Rightarrow)$$

Per la conv. pt. di f_n so che $f_n(x) \to f(x)$, $f_n(a) \to f(a)$

Per conv. unif. delle f_n' so che $\int_a^x f_n'(t)\,dt \to \int_a^x g(t)\,dt$

DUNQUE, passando al limite

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

Da (T.F.C.I $\Leftarrow$) ottengo che f è C^1 e $g = f'$.

Mi manca la conv. UNIF delle f_n a f. Facciamo

$$f_n(x) - f(x) = f_n(a) - f(a) + \int_a^x \left(f_n'(t) - f'(t)\right) dt$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - f(a)| + \int_a^b |f_n'(t) - f'(t)|\,dt$$

IN ALTRI TERMINI

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - f(a)| + \int_a^b \sup_{a \leq t \leq b} |f_n'(t) - f'(t)|\,dt$$

$$\| f_n - f \|_\infty \overset{(1)}{\le} \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{\to 0} + (b-a) \underbrace{\|f'_n - f'\|_\infty}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \quad \|f_n - f\|_\infty \to 0 \quad \text{CIOE'} \quad f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f \qquad \#$$

Se f'_n convergono unif. a qualcosa, questo è f'

SERIE DI FUNZIONI

__Def.__ $A \subset \mathbb{R}^N \qquad f_n : A \to \mathbb{R}^M$ (di solito $N=M=1$)

((f_n) è una succ. di funzioni).

CHIAMO "SOMMA PARZIALE / RIDOTTA n-SIMA"

la funzione $S_n : A \to \mathbb{R}^M$ definita da

$$S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

Le somme parziali (S_n) sono un'altra succ. di funzioni

__Dico__ che (f_n) è SOMMABILE PUNTUALMENTE su A / la serie delle f_n è PUNTUALMENTE CONVERGENTE su A.

se la succ. (S_n) ammette un limite puntuale $S : A \to \mathbb{R}^M$

dunque $S_n \xrightarrow{\text{Pt}} S$

IN QUESTO CASO INDICO $\quad S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$

e la chiamo "SOMMA" della serie delle f_n $\quad \left(S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \forall x \in A \right)$

ATTENZIONE. Spesso (MOLTO SPESSO) con $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ indico anche la "serie", cioè la successione (S_n)

SAREBBE MEGLIO DIRE le (f_n) sono sommabili e hanno somma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

Dico che (f_n) è SOMMABILE UNIFORMEMENTE SU A / la serie delle f_n è UNIFORMENTE CONVERGENTE SU A se la succ. (S_n) ammette un limite uniforme $S: A \to \mathbb{R}^M$

dunque $S_n \xrightarrow{UNIF} S$

Notiamo che se c'è la conv. unif $\Rightarrow$ c'è la convergenza puntuale

DUNQUE la "somma uniforme" della serie è quella di prima

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

La differenza tra le def è di sapere se

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \xrightarrow{PT \text{ o } UNIF} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

OSS. La prima def. (PUNTUALE) non sembra troppo difficile da verificare, anche se non riesco a calcolare $S(x)$

Ricordiamo che ci sono dei criteri di convergenza per le serie numeriche

La seconda def (UNIF.) sembra molto più difficile: dovrei far vedere che

$$\sup_{x \in A} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right\|_{\mathbb{R}^M} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Se non so chi è $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ SEMBRA DIFFICILE

TEOREMA Siano $A \subset \mathbb{R}^N$ e $f_n: A \to \mathbb{R}^M$ tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_{\infty, A} < +\infty$$

(in particolare $\| f_n \|_\infty < +\infty$ cioè f_n è limitata)

(CONVERGENZA TOTALE DELLA $\sum f_n$)

(ricordo che $\| f \|_{\infty, A} = \sup_{x \in A} \| f(x) \|_{\mathbb{R}^M}$)

Allora le (f_n) sono uniformemente sommabili

(la $\sum_1^\infty f_n$ converge uniformemente).

- LA COSA IMPORTANTE DI QUESTO TEOREMA È CHE DIMOSTRO CHE esiste $\sum_1^\infty f_n(x)$ senza doverla calcolare!
- Noto che devo "risolvere" una serie numerica a termini ≥ 0

DIM. L'IDEA è che " CONV. ASSOLUTA $\Rightarrow$ CONVERGENZA "

IN EFFETTI ABBIAMO VISTO (Lezione 10)

Se X è uno spazio vettoriale con norma $\| \|$, e $(X, \| \|)$ $\boxed{\text{È COMPLETO}}$ allora per ogni succ. (x_n) in X

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty \Rightarrow \text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ è convergente in } X$$

($\sum x_n$ è ASS. CONV.) (le (x_n) sono sommabili in X)

5 MINUTI DI PAUSA

CHE SPAZIO CONSIDERO? CONSIDERO

$$\mathcal{B}(A, \mathbb{R}^M) = \{ f : A \to \mathbb{R}^M, \ f \text{ limitata} \}$$

con la norma $\|f\| = \|f\|_{\infty, A}$

Per applicare il teorema devo sapere che $\mathcal{B}(A, \mathbb{R}^M)$ è completo con la norma detta sopra. CIOÈ devo dim. che

- Se (f_n) è una succ. di Cauchy in $\mathcal{B}(A, \mathbb{R}^M)$ $\Rightarrow$ f_n ha limite
- Prendo f_n di Cauchy in $\mathcal{B}(A, \mathbb{R}^M)$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \geq \bar{n} \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$

$\Updownarrow$

(*) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \geq \bar{n} \ \forall x \in A \quad \|f_n(x) - f_m(x)\|_{\mathbb{R}^M} < \varepsilon$

IN PARTICOLARE, $\forall x \in A$, $(f_n(x))$ è di Cauchy in $\mathbb{R}^M$

SO CHE $\mathbb{R}^m$ è completo $\Rightarrow$ esiste $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$

(Ho trovato f !!) Noto che da $(*)$ si ricava $\underline{\underline{(m\to\infty)}}$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ \bar{m}\in\mathbb{N} : \forall m\geq\bar{m}\ \ \forall x\ \ \|f_m(x)-f(x)\|_{\mathbb{R}^m}<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ \bar{m}\in\mathbb{N} : \forall m\geq\bar{m}\ \ \|f_m-f\|_\infty<\varepsilon$ cioè $f_n\to f$ (in $\mathcal{B}(A,\mathbb{R}^m)$)

DUNQUE f_n ha limite f in $\mathcal{B}(A,\mathbb{R}^n)$ #

<u>ATTENZIONE</u> IL TEOREMA NON È INVERTIBILE.

Non è detto che conv. unif $\Rightarrow$ conv. totale

Dai teoremi visti ieri otteniamo i corrispondenti risultati per le serie

Basta applicare i teoremi di ieri <u>alle S_m (invece che alle f_m)</u>

<u>PROP.</u> (A) Se le (f_m) sono UNIF. SOMMABILI ($\sum f_m$ CONV. UNIF.), se x_0 è di acc. per A, se

$$\lim_{x\to x_0} f_m(x) = l_m$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} l_m \text{ è convergente e } \lim_{x\to x_0}\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} l_m$$

[IN PARTICOLARE se $x_0\in A$ e f_m sono continue in x_0

$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} f_m$ è continua in x_0.]

(B) Se $f_m:[a,b]\to\mathbb{R}$ sono continue su $[a,b]$

e la $\sum f_m$ conv. unif $\Rightarrow$

$$\int_a^b \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)}_{\text{continua su } [a,b]}\,dx = \sum_{m=1}^{\infty}\int_a^b f_m(x)\,dx \in\mathbb{R}$$

(C) Se $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono C^1, se la serie $\sum_1 f_n$ converge puntualmente, la serie $\sum_1 f_n'$ converge uniformemente $\Longrightarrow$

$\sum_1^\infty f_n$ è una funzione C^1 e vale

$$\left(\sum_1^\infty f_n\right)' = \sum_1^\infty f_n'$$

e la serie $\sum f$ converge uniformemente.

ESEMPIO Considero $\boxed{\sum_{n=1}^\infty \frac{x}{1+n^2x^2}}$ $\left(\text{DUNQUE } f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}\right)$

OSSERVO CHE a x fissato la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{x}{1+n^2x^2}$ converge

infatti se $x=0$ trovo la serie $\sum 0 = 0$, se $x \neq 0$ $\frac{x}{1+n^2x^2} \simeq \frac{1}{n^2}\frac{1}{x}$

che mi dà una serie convergente. DUNQUE LA SOMMA

$$S(x) := \sum_{n=1}^\infty \frac{x}{1+n^2x^2}$$ è ben definita $\forall x \in \mathbb{R}$

$(S : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

DOMANDA $\sum_1^\infty \frac{x}{1+n^2x^2}$ DIPENDE CON CONTINUITÀ DA x ??

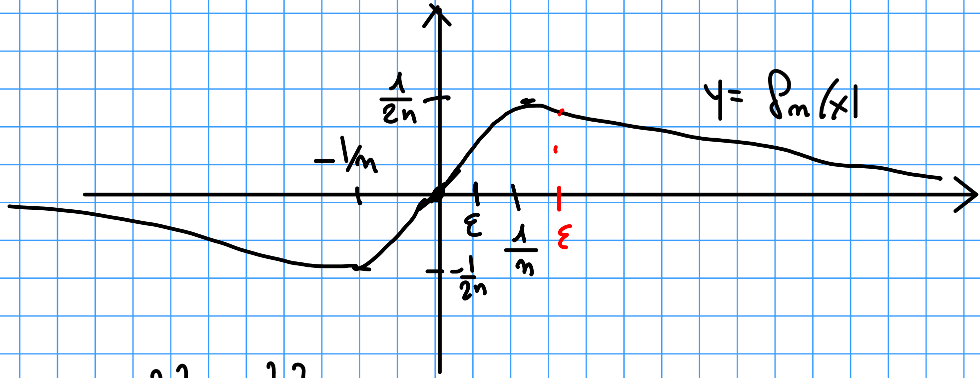
DEVO RICORRERE AI TEOREMI SOPRA $\sim$ MI SERVE LA CONV. UNIFORME della serie $\sum_1 \frac{x}{1+n^2x^2}$

PROVO CON LA CONV. TOTALE, per esempio su tutto $\mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$ MI CHIEDO SE $\sum_{n=1}^\infty \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|}_{\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}}} < +\infty$

Devo calcolarlo. Faccio uno studio di funzione per $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$

$\forall n \geq 1$ $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ (VINCE x^2 su x)



$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \quad \text{e si annulla in } x = \pm\frac{1}{n}$$

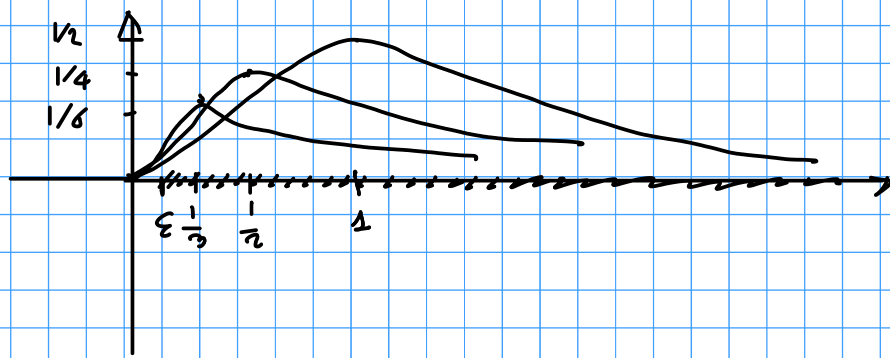
VEDO CHE $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{1+1} = \frac{1}{2n}$

$$\Longrightarrow \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2n}$$

MA $\sum \frac{1}{2n} = +\infty$!!

NON È TOTALMENTE CONV. SU $\mathbb{R}$

GUARDO I GRAFICI DI f_n al variare di n



Noto che i picchi hanno ascissa $\frac{1}{n} \to 0$

SEMBRA CHE CI SIA UN PROBLEMA IN $x=0$.

TENTO DI "SCANSARE" $x=0$

$\boxed{\text{FISSO } \varepsilon > 0}$ e mi metto su $A_\varepsilon = [\varepsilon, +\infty[$

e provo la convergenza totale su A_ε. DUNQUE MI SERVE

$$\|f_n\|_{\infty, A_\varepsilon} = \sup_{x\geq\varepsilon} \frac{x}{1+n^2x^2} = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{se } \frac{1}{n} > \varepsilon \iff n < \frac{1}{\varepsilon} \\ f_n(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+n^2\varepsilon^2} & \text{se } \frac{1}{n} \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_{\infty, A_\varepsilon} = \underbrace{\sum_{n < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{2n}}_{\substack{\text{NUMERO FINITO} \\ \text{DI ADDENDI} \\ \Rightarrow\, < +\infty}} + \underbrace{\sum_{n \geq \frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{1+n^2\varepsilon^2}}_{\substack{\text{FINITA PERCHÉ} \\ \frac{\varepsilon}{1+n^2\varepsilon^2} \sim \frac{1}{n^2}\frac{1}{\varepsilon^2}}} < +\infty$$

Ho CONV. TOTALE su $[\varepsilon, +\infty[$ $\Rightarrow$ Ho CONV. UNIF. SU $[\varepsilon, +\infty[$

Ne segue che, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato,

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} \text{ È CONTINUA SU } [\varepsilon, +\infty[$$

ALLORA $S(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ È $\boxed{\text{CONTINUA SU }]0, +\infty[}$

(dato un qualunque $x_0 > 0$ posso scegliere $\varepsilon = \frac{x_0}{2}$ $\Rightarrow$ S è continua su $[\varepsilon, +\infty[$ $\Rightarrow$ S è continua in x_0)

Nello stesso modo trovo che S $\boxed{\text{è continua su }]-\infty, 0[}$

MI RIMANE DA CAPIRE SE S è continua in $x=0$

(vediamo domani che non lo è)

- DAI TEOREMI POSSIAMO RICAVARE CHE

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = \sum_{1}^{\infty} 0 = 0$$

Perché $+\infty$ è di acc. per $[1, +\infty[$ e la conv. è unif su $[1, +\infty[$

(lo stesso se $x \to -\infty$)

(mi basta $[1, +\infty[$ perché se $x \to +\infty$, $x \in [1, +\infty[$)

#