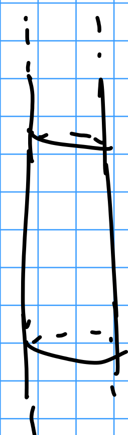
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 39 08/03/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

PROSSIMO COMPITINO SABATO 20/3 ore 9.00
(su limiti e integrali)



$$\iiint_A \frac{dx}{x^2+y^2+z^2} \qquad A = \{\, x^2+y^2 \le 1 \,\}$$

Passo in coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$
$z = z$ $\Rightarrow$ $dx\,dy\,dz = \rho\, d\theta\, d\rho\, dz$

$A \to A' = \{ (\rho, \theta, z) : \rho < 1 \}$. L'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\rho\, d\rho}{\rho^2+z^2} \right) dz \right) d\theta = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\ln(\rho^2+z^2)}{2} \right]_0^1 dz =$$

$$\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\ln(1+z^2) - \ln(z^2) \right) dz = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right) dz =$$

(per parti) $$\pi \left[z \ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \pi \int_{-\infty}^{+\infty} z \, \frac{z^2}{1+z^2} \left(-\frac{2}{z^3} \right) dz$$

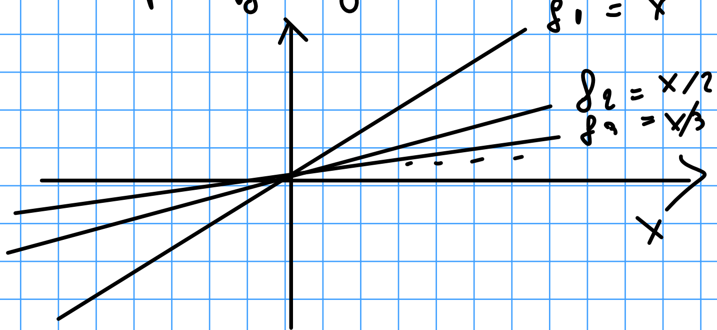
$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi \Big[\arctan z \Big]_{-\infty}^{+\infty} = 4\pi^2$$

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

(scambi di limiti / integrale / derivata ..)

Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ è data una $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ con $A \subset \mathbb{R}^m$ dico che (f_n) è una successione di funzioni (da A in $\mathbb{R}^M$) (di solito $A \subset \mathbb{R}$ $f : A \to \mathbb{R}$)

Per esempio le $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_n(x) = \frac{x}{n}$



Voglio dare una definizione di $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ vedremo che ci sono diverse definizioni possibili - ognuna con pregi e difetti

Def. (convergenza puntuale) Se $f_n, f : A \to \mathbb{R}^M$ dico che f_n converge "PUNTUALMENTE" a f su A

$$\forall x \in A \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

In questo caso scrivo $f_n \xrightarrow{pt.} f$

Nell'esempio $f_n(x) = \frac{x}{n}$ è chiaro che $f_n \xrightarrow{pt.} 0$ perché

FUNZIONE NULLA $f(x) = 0 \quad \forall x$

se $x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$

VEDIAMO SUBITO UN DIFETTO DI QUESTA CONVERGENZA

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ PERÒ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{n} = +\infty$$

$$\infty = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{n} \neq \lim_{x\to+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n} = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$$

NON POSSO SCAMBIARE L'ORDINE DEI LIMITI

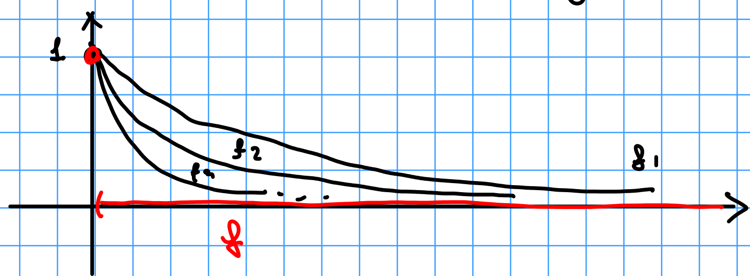
IN GENERALE NON VALE:

se $f_n \xrightarrow{p.t} f$ $\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

VEDIAMO UN ALTRO ESEMPIO

$f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = e^{-nx}$



Vediamo se esiste il limite puntuale. In effetti

dato $x \geq 0$ esiste $\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 1 & se\ x=0 \\ 0 & se\ x>0 \end{cases}$

Dunque $f_n \xrightarrow{pt} f$ dove $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vale $\begin{cases} 1 & se\ x=0 \\ 0 & se\ x>0 \end{cases}$

NON POSSO SCAMBIARE IL LIMITE in $n\to\infty$ con IL LIMITE $x\to 0^+$

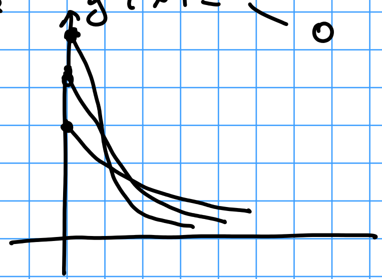
$$0 = \lim_{x\to 0^+}\underbrace{\lim_{n\to\infty} e^{-nx}}_{=0\ \forall x>0} \qquad \lim_{n\to\infty}\overbrace{\lim_{x\to 0^+} e^{-nx}}^{=1\ \forall n} = 1$$

Anche se f_n sono continue f è discontinua [IL LIMITE PUNTUALE NON CONSERVA LA CONTINUITÀ]

ALTRO ESEMPIO $\qquad f_n(x) = n e^{-nx}$

Simile all'esempio precedente, solo che ora $f_n \xrightarrow{pt} f$

dove $f(x) = \begin{cases} +\infty & \\ 0 & x>0 \end{cases}$ $\qquad$ (n "perde" rispetto all'esponenziale se $x>0$)



A maggior ragione

$$+\infty = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\lim_{x\to 0^+} f_n(x)}_{n} \neq \lim_{x\to 0^+} \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$$

In questo caso c'è un altro scambio che non posso fare. Vediamo che

$$y = nx \qquad dy = n\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} n e^{-nx}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy$$

$$= \left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty} = 1$$

Viceversa $\qquad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0$ perché $f(x) = 0 \ \forall x>0$

(anche se $f(0) = +\infty$ questo non dà contributo all'integrale perché $\{0\}$ ha misura nulla)

Si potrebbe modificare l'esempio e fare in modo che

$f_n \xrightarrow{pt} 0 \quad$ e comunque $\quad \int f_n \longrightarrow 1$

NOTO che nell'esempio precedente $\quad f_n(x) = e^{-nx}$

si può "passare al limite sotto l'integrale"

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = \frac{1}{n} \to 0$$

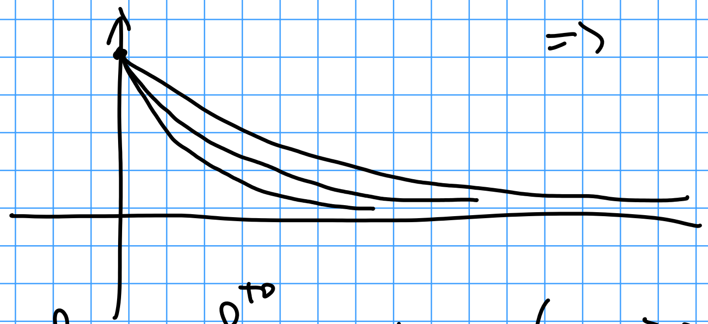
$$= \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \left(f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x>0 \end{cases} \right)$$

IN EFFETTI QUESTO SI POTEVA VEDERE SUBITO USANDO IL TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA

INFATTI se chiamo $g(x) = f_1(x) = e^{-x}$

$\Rightarrow \quad 0 \le f_n \le g \quad \forall n$

$\Rightarrow \quad |f_n| \le g$



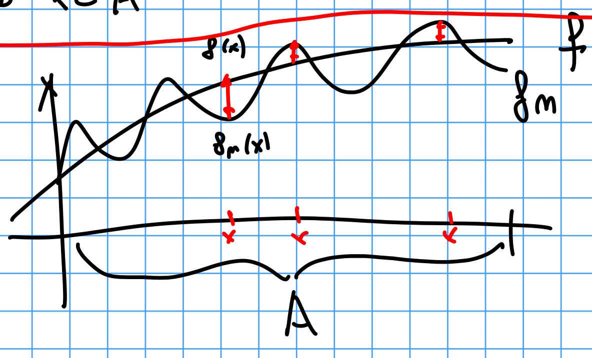
Dato che $\int_0^{+\infty} g = 1$ (g è integrabile) $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n\,dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \left(= \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0\right)$$

Def. (CONVERGENZA UNIFORME)

Date $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ e $f : A \to \mathbb{R}^M$ dico che f_n converge uniformemente a f su A se

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}\|f(x)-f_n(x)\|_M = 0}$$



(il massimo delle distanze tra $f_n(x)$ e $f(x)$, al variare di x in A, deve tendere a zero)

UN ALTRO MODO DI DARE LA DEF.:

① $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall x \in A, \ \forall n \ge \bar{n} \quad \|f_n(x)-f(x)\|_M < \varepsilon$

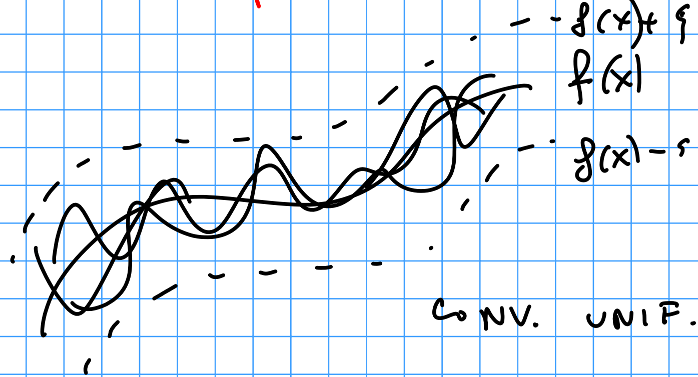
$\bar{n}$ dipende solo da $\varepsilon > 0$

NOTA CHE LA CONVERGENZA PUNTUALE SI TRADUCE

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in A \quad \exists \ \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \quad \| f_n(x) - f(x) \|_M < \varepsilon$

$\bar{n}$ dipende da $\varepsilon > 0$ e da $x \in A$

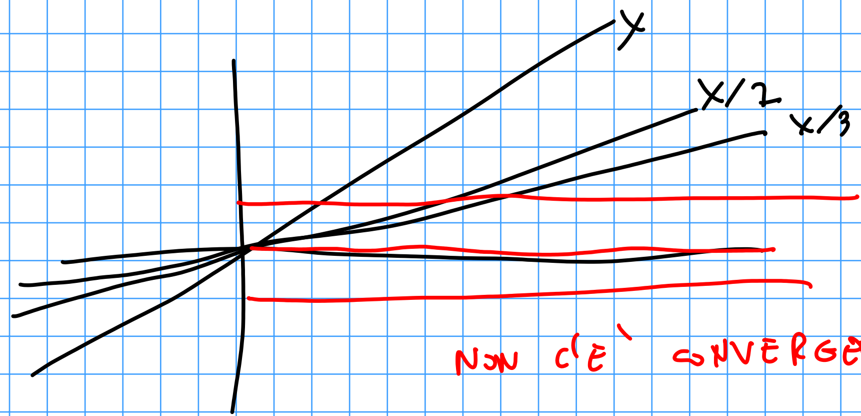
(1) $\rightarrow$



$f_n \in [f - \varepsilon, f + \varepsilon]$

$\underline{\forall x} \quad \forall n \geq \bar{n}$;

CONV. UNIF.



f_n <u>NON</u> stanno tra $f - \varepsilon$ e $f + \varepsilon$ per n grande

NON C'È CONVERGENZA UNIFORME

<u>OSS.</u> Chiamiamo $\mathbb{X}_1 = \{ f : A \to \mathbb{R}^M \}$

$\mathbb{X}_1$ è uno spazio vettoriale ($\mathbb{X}_1$ non ha dim finita — a meno che A non sia fatto da un numero finito di pti)

Poniamo $\| f \|_{\infty, A} = \sup\limits_{x \in A} \| f(x) \|_M$ ← la chiamo NORMA INFINITO

. Si vede facilmente $(\| \ \| = \| \ \|_{\infty, A})$

- $\| f \| \geq 0$ e $\| f \| = 0 \iff f(x) = 0 \ \forall x \ (f = 0)$
- $\| t f \| = |t| \| f \|$
- $\| f + g \| \leq \| f + g \|$

PERÒ può succedere che $\| f \| = +\infty$

(per esempio se $f(x) = x$ su $A = [0, +\infty[\ \Rightarrow \ \| f \| = +\infty$)

Se poi prendo

$\mathcal{B}(A,\mathbb{R}^m) = \mathbb{X} = \{ f : A \to \mathbb{R}^m,\ f \text{ limitata} \}$ oppure

$\mathcal{C}(A,\mathbb{R}^m) = \mathbb{X}_0 = \{ f : A \to \mathbb{R}^n,\ f \text{ continua} \}$

e prendo A limitato e chiuso

$\Rightarrow \quad \mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X} \quad$ e $\quad \| f \|_{\infty, A} < +\infty \quad \forall f$

DUNQUE IN QUESTI CASI $\| \ \|_{\infty, A}$ è una norma in questi spazi vettoriali

CON QUESTA NORMA

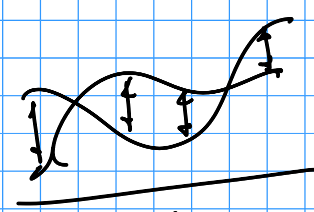
$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \iff f_n \longrightarrow f \text{ UNIFORMEMENTE}$$

$$\left(f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \right)$$

" la convergenza uniforme PROVIENE DA UNA NORMA "

IN SOSTANZA proviene da una NOZIONE DI DISTANZA TRA DUE FUNZIONI

$$d_{\infty,A}(f,g) = \sup_{x \in A} \| f(x) - g(x) \|_{\mathbb{R}^n}$$



A

<u>OSSERVAZIONE.</u> $\qquad f_n : A \to \mathbb{R}^m \quad f : A \to \mathbb{R}^m$

Se $\quad f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{\text{pt}} f$

(si vede facilmente: dato $x \in A$ $\ \| f_n(x) - f(x) \| \leq \sup_{x' \in A} \| f_n(x') - f(x')\|$

<u>TEOREMA</u> (SCAMBIO DI LIMITI)

$f, f_n : A \to \mathbb{R}^m \qquad x_0$ pto di accumulazione per A
(x_0 può anche essere ∞)

SUPPONIAMO CHE

(a) $\ f_n \to f \ $ UNIFORMEMENTE

(b) $\forall n \quad \exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \ell_n$

ALLORA (I) $\exists \lim_{n \to \infty} \ell_n =: \ell$

(II) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

STO DICENDO DUNQUE che, se $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

$\boxed{\text{NO DIM}}$

CONSEGUENZA

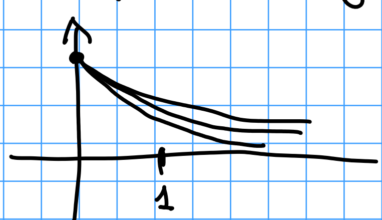
Se f_n sono continue (in x_0 o su tutto A) e $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$

$\Rightarrow$ f è continua (in x_0 o su tutto A).

DUNQUE $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^N)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{B}(A, \mathbb{R}^N)$ (usando la norma $\| \ \|_{\infty, A}$)

A deve essere limitato e chiuso

ESEMPIO Se prendo $f_n(x) = e^{-nx}$ e le restringo su $[1, +\infty]$



$\boxed{f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} 0 \quad \text{su } [1, +\infty[}$

INFATTI

$$\sup_{x \geq 1} | e^{-nx} - 0 | = \sup_{x \geq 1} e^{-nx} = e^{-n}$$

(e^{-nx} decresce rispetto a x). Se $f(x) = 0 \ \forall x$ ho dim che

$$\| f_n - f \|_\infty = e^{-n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

QUI SI VEDE CHE

$$0 = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to \infty} e^{-nx} = \lim_{x \to \infty} \lim_{n \to \infty} = 0$$

#

PROP. Se $A \subset \mathbb{R}^N$ è misurabile, con misura finita e se $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f$ $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ integrabili $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} f \text{ è integrabile e} \\ \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx \end{cases}$$

DIM Si deduce dal teorema della conv. dominata

Ricordiamo che $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad \forall n \geq \bar{n} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

$$f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

RICORDO CHE da $f_n \xrightarrow{\|\,\|_\infty} f$ si ricava che f_n è di Cauchy rispetto alla $\|\,\|_\infty$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad \forall n, m \geq \bar{n} \quad \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$f_m(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f_m(x) + \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Prendo $\varepsilon = 1$ trovo $\bar{n}$ per cui $\forall n \geq \bar{n}$

$$\boxed{f_{\bar{n}}(x) - 1 \leq f_n(x) \leq f_{\bar{n}}(x) + 1}$$

Siccome $f_{\bar{n}}$ è integrabile deduco che

$$\forall n \geq \bar{n} \quad |f_n(x)| \leq \underbrace{|f_{\bar{n}}(x)| + 1}_{g(x)}$$

$g(x)$ è integrabile perché $f_{\bar{n}}$ è integrabile e 1 è integrabile essendo $|A| < +\infty$

$\Longrightarrow$ Applico la conv. dominata e trovo la tesi #

SUGLI INSIEMI DI MISURA FINITA la conv. unif "VA D'ACCORDO" con l'integrale.

VEDIAMO COSA SUCCEDE RISPETTO ALLA DERIVATA

$f, f_n : I \to \mathbb{R}$ $\quad I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo

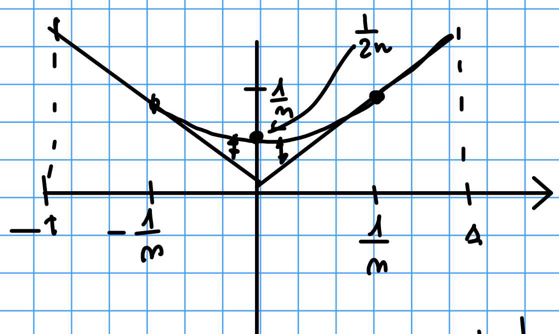
f_n siano derivabili su I e $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f$

(potrei considerare $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ e parlare di derivate parziali)

DOMANDA Posso DEDURRE CHE f è derivabile e che $f_n' \xrightarrow{?!} f'$

IN GENERALE NO (la conv. unif. non va d'accordo con la derivata - a meno di mettere qualche condizione)

CONTROESEMPIO



$f(x) = |x|$

la restringo a $[-1,1]$

Dato n definisco

$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n} \\ a_n x^2 + b_n & \text{se } |x| \leq 1/n \end{cases}$

Scelgo a_n e b_n in modo che $a_n x^2 + b_n$ valga $\frac{1}{n}$ se $x = \frac{1}{n}$ e che la sua derivata valga 1 $\left(x = \frac{1}{n}\right)$

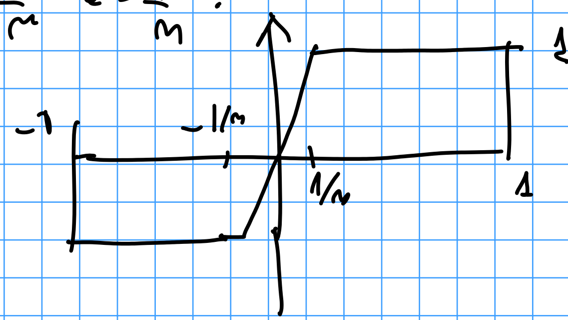
DUNQUE VOGLIO

$$\begin{cases} a_n \frac{1}{n^2} + b_n = \frac{1}{n} \\ 2a_n \frac{1}{n} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{n}{2} \frac{1}{n^2} + b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow b_n = \frac{1}{2n} \\ a = \frac{n}{2} \end{cases}$$

DUNQUE $f_n = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{n x^2}{2} + \frac{1}{2n} & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$

QUESTE f_n sono derivabili perché le due definizioni "si incollano bene" nei punti $\frac{1}{n}$ e $-\frac{1}{n}$.

$f_n'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1/n \\ nx & \text{se } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -1 & x \leq 1/n \end{cases}$



VEDO CHE

$$\| f_n - f \|_\infty = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \| f_n(x) - f \| = \sup_{0 \leq x \leq \frac{1}{n}} \left| \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} - x \right|$$

NOTO CHE $x \to \frac{nx^2}{2} - x + \frac{1}{2n}$ ha derivata $nx - 1 < 0$ in $[0, 1/n]$

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq x \leq \frac{1}{n}} \left| \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} - x \right| = \text{valore a } x=0 = \frac{1}{2n}$$

$$\| f_n - f \|_\infty = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0 \iff f_n \to f \text{ UNIFORMEMENTE}$$

PERÒ f <u>NON È DERIVABILE IN $x=0$</u>