Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 38 03/03/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

PASSAGGI AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

PROBLEMA Supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia data una funzione $f_n : E \to [-\infty, +\infty]$ $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile

f_n sia integrabile su E ($\forall n$ esiste $\int_E f_n(x)\,dx$)

Supponiamo anche che $\exists\, f : E \to [\infty, +\infty]$ tale che

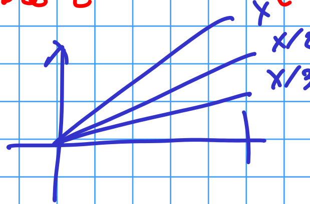
$f_n \to f$ nel senso che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{PER (quasi) OGNI } x$$

MI CHIEDO SE f è integrabile su E e se $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$

IN GENERALE NO

Per esempio $E = [0,1]$ $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$



Si vede che $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x}{n} = 0$

Dunque $f(x) = 0$ IN EFFETTI (in questo caso)

$\int_0^1 f_n \quad \int_0^1 \frac{x}{n}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{n}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$0 = \int_0^1 0\,dx = \int_0^1 f$ IN QUESTO ESEMPIO TORNA

PURTROPPO PUÒ ANDARE MALE

CONTROESEMPIO : Non è sempre vero che

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

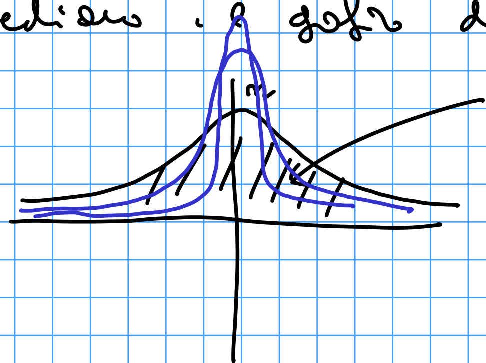
Posso prendere $\boxed{f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}}$ $E = \mathbb{R}$

Vediamo quanto fa: $\int_E f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n\,dx}{1+n^2x^2} =$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n\,dx}{1+(nx)^2}$ $y = nx$ $dy = n\,dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = \arctan(y)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$

Per curiosità vediamo il grafico di f_n :



Se faccio $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n^2x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x\neq 0\end{cases}$

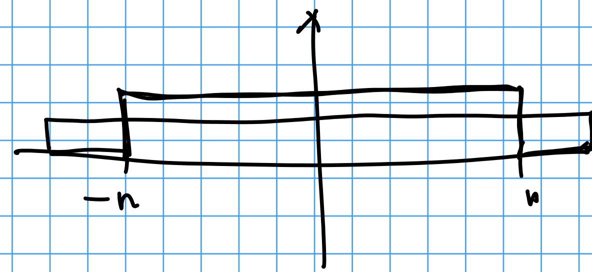
DUNQUE $f_n \to f$ dove $f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x\neq 0\end{cases}$

Questa f è integrabile e ha integrale nullo, dato che $f=0$ per quasi ogni x ($\forall x$ tranne $x=0$)

DUNQUE $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n\,dx \to \pi \neq \int_{-\infty}^{+\infty} f\,dx = 0$

ALTRO ESEMPIO

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{se } -n\le x\le n\\ 0 & \text{se } |x|>n\end{cases}$$



$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$$

Però $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-n}^{n}\frac{1}{n}\,dx = \frac{2n}{n} = 2 \neq 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

TEOREMA (Lebesgue - o della convergenza dominata)

Supponiamo che $f, f_n : \mathbb{R}^N \to [-\infty,+\infty]$ misurabili e tali che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{per quasi ogni } x\in\mathbb{R}^N$$

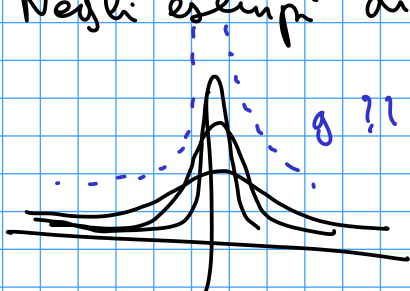
Supponiamo inoltre che esista $g:\mathbb{R}^N\to[0,+\infty]$, INTEGRABILE, e tale che

$$\boxed{|f_n(x)| \le g(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}^N}$$

Allora (f_n sono tutte integrabili), $|f|\le g$ (dunque anche f è integrabile) e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx \left(=\int_{\mathbb{R}^N}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\right)$$

Negli esempi di prima NON si riesce a costruire una tale g !!



← QUALUNQUE g che sta sopra tutte le f_n deve avere integrale $+\infty$

TORNERÀ UTILE NEL SEGUITO

ESERCIZIO

$$\iiint_D \frac{z\,dx\,dy\,dz}{1+x^2+y^2+z^2} = I$$

$$D = \{ x^2+y^2+z^2 \le 1 \ , \ z \ge 0 \}$$

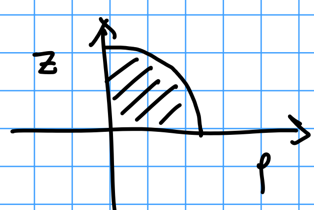
Proviamo a rifarlo con coordinate cilindriche

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad z = z$$

$$dx\,dy\,dz = \rho\, d\theta\, d\rho\, dz$$

$$D \to \{ (\theta, \rho, z) : \ \rho^2+z^2 \le 1 \ , \ z \ge 0 \} = D'$$

$$I = \iiint_{D'} \frac{z\rho}{1+\rho^2+z^2}\, d\theta\, d\rho\, dz = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \iint_{\{\rho^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\}} \frac{z\rho}{1+\rho^2+z^2}\, dz\, d\rho$$



$$= 2\pi \int_0^1 \rho \left(\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{z\,dz}{1+\rho^2+z^2} \right) d\rho =$$

$$= \pi \int_0^1 \rho \left[\ln(1+\rho^2+z^2) \right]_0^{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = \pi \int_0^1 \rho \left(\ln(1+\rho^2+1-\rho^2) - \ln(1+\rho^2) \right) d\rho$$

$$\pi \int_0^1 \rho \left(\ln(2) - \ln(1+\rho^2) \right) d\rho = \ln(2)\,\pi \underbrace{\int_0^1 \rho\, d\rho}_{1/2} - \underbrace{\pi \int_0^1 \rho \ln(1+\rho^2)\, d\rho}_{(*)}$$

$$\frac{\pi}{2}\ln(2) - \pi\left[\frac{\rho^2}{2}\ln(1+\rho^2) \right]_0^1 + \pi \int_0^1 \frac{\rho^2}{2} \frac{2\rho}{1+\rho^2}\, d\rho =$$

$$s = \rho^2 \qquad ds = 2\rho\, d\rho$$

$$\frac{\pi}{2}\cancel{\ln(2)} - \frac{\pi}{2}\cancel{\ln(2)} + \pi \int_0^1 \frac{s}{2} \frac{ds}{1+s} =$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+s} \right) ds = \frac{\pi}{2} \left(1 - \left[\ln(1+s) \right]_0^1 \right) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \ln(2) \right)$$

(*) si potrebbe fare più velocemente ponendo subito $s = \rho^2$

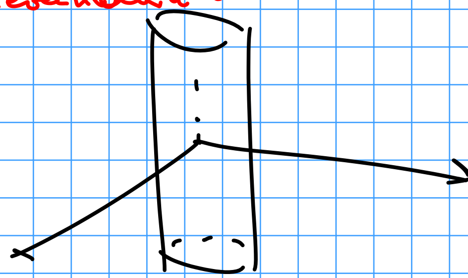
$$(*) = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \ln(1+s)\, ds = -\frac{\pi}{2} \left[s\ln(1+s) \right]_0^1 + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{s}{1+s}\, ds \ldots$$

(SI CONTINUA COME SOPRA)

Es. $\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$ $\qquad D=\{\, x^2+y^2\le 1 \,\}\subset\mathbb{R}^3$

$\geq 0 \to$ l'integrale esiste (eventualmente $+\infty$)

coordinate cilindriche



$$\iiint_{\{\rho^2\le 1\}} \frac{\rho\,d\rho\,d\theta\,dz}{\rho^2+z^2} =$$

$$\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^1 \frac{\rho\,d\rho}{\rho^2+z^2}\right)dz =$$

$$2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(\rho^2+z^2)\right]_{\rho=0}^{\rho=1}\Big)\,dz = \pi\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\ln(1+z^2)-\ln(z^2)\right)dz$$

$$= \pi\Big[\underbrace{z\left[\ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\right]}_{\text{dovrebbe venire zero}}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \pi\int_{-\infty}^{+\infty} z\left(\frac{2z}{1+z^2}-\frac{2z}{z^2}\right)dz =$$

$\ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\simeq\frac{1}{z^2}$ x $z\to\infty$

$$= -\pi\int_{-\infty}^{+\infty} z\,\frac{\cancel{2z^3}-2z-\cancel{2z^3}}{(1+z^2)z^2}\,dz =$$

$$\pi\int\frac{2}{1+z^2}\,dz = 4\pi^2 \;?!$$

$\uparrow$
FINITO!!

FINIAMO LUNEDÌ