Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 36   01/03/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

INTEGRAZIONE

Definite le nozioni:

- INSIEME MISURABILE
- FUNZIONI MISURABILE
- FUNZIONI INTEGRABILI

INTEGRALE $\left(\begin{array}{l} f \text{ mis. } f \geq 0 \\ f \text{ integrabile} \end{array} \right)$

Proprietà delle funz mis. / integ.

Teoremi (per usare le nozioni sopra)

- TEOREMI DI FUBINI / TONELLI
- TEOREMA DI CAMBIO DI VARIABILE

TONELLI / FUBINI (integrali iterati)

Se $f : E \to [-\infty, +\infty]$ ci si riconduce a $\mathbb{R}^N$ considerando
$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{su } E \\ 0 & \text{fuori } E \end{cases}$

Se $f : \mathbb{R}^{N+M} \to [-\infty, +\infty]$ misurabile.

CASO $f \geq 0$ (Tonelli) posso scrivere (salto le precisazioni)

$$(*) \quad \int\!\!\int_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \right) dx$$

IN QUESTO CASO in ⊛ può comparire $+\infty = +\infty$

Questo teorema può servire a stabilire se f è integrabile

CASO a segno variabile (Fubini)

MI SERVE f integrabile $\Rightarrow$ vale ⊛

Se f non è né ≥ 0 né integrabile le ⊛ può dare risultati

diversi – POSSONO ESSERE DIVERSI

OSS. Nelle ipotesi di Fubini / Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dx \right) dy$$

ESEMPI $\quad f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \dfrac{1}{\|(x,y)\|^\alpha}$ $\quad \boxed{\alpha > 0}$

$(f(0,0) = +\infty)$

f è continua (fuori da $(0,0)$ – $\{(0,0)\}$ è trascurabile)

$\Rightarrow$ f è misurabile, $f \geq 0$ (posso applicare Tonelli)

① f su tutto $\mathbb{R}^2$, che integrale ha?!

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \right) dx$$

Prendiamo l'integrale interno

$$\frac{1}{|x|^\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{\alpha/2}} \qquad t = \frac{y}{x} \qquad dt = \frac{dy}{x}$$

$$= \frac{1}{|x|^{\alpha-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha/2}} = \frac{1}{|x|^{\alpha-1}} \cdot \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha/2}} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Se $\alpha \le 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{|x|^{\alpha-1}}\cdot(+\infty)}_{+\infty \text{ in ogni } x \neq 0} dx = \quad = +\infty$

Se $\alpha > 1$ devo calcolare

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha/2}}}_{\in \mathbb{R}^+\setminus\{0\}} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x|^{\alpha-1}}$$

Purtroppo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x|^{\alpha-1}} = +\infty$$

PROBLEMA IN ZERO

Ricordo che

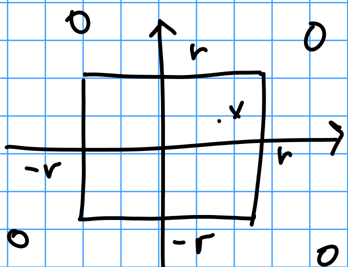
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \ge 1 \\ < +\infty \end{cases} \qquad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \le 1 \\ < +\infty \end{cases} \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha$$

$$\Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dx\,dy}{\|(x,y)\|^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha$$

dunque $\forall \alpha$ la $f(x,y) = \frac{1}{\|(x,y)\|^\alpha}$ non è integrabile

VEDIAMO se f è integrabile vicino a zero:

per esempio in $Q = Q(r) = \{(x,y) : |x| \le r, |y| \le r\}$



COME PRIMA (uso Tonelli: dato che $f \ge 0$, f misurabile)

A rigore devo considerare $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y)\in Q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(x,y)\,dy\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-r}^{r}\tilde{f}(x,y)\,dy\right)dx =$$

$$\int_{-r}^{r}\left(\int_{-r}^{r} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{-r}^{r}\left(\int_{-r}^{r}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\right)dx =$$

$y = tx$

$t = \frac{y}{x}$

$$\int_{-r}^{r}\frac{1}{|x|^{\alpha-1}}\underbrace{\left(\int_{-r/x}^{r/x}\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha/2}}\right)}_{g(x)}dx$$

NOTO CHE $g(x)$ è continua se $x\neq 0$

se $x\to 0$ $\quad g(x)\to\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha/2}}$ $\begin{cases} <+\infty & \alpha>1\\ =+\infty & \alpha\leq 1\end{cases}$

$$\int_{-r}^{r}\frac{g(x)}{|x|^{\alpha-1}}\,dx$$

$\boxed{\text{SE } \alpha>1}$ INTEGRANDO $\simeq \frac{1}{|x|^{\alpha-1}}$ VICINO A ZERO

che è integrabile in $x \iff \alpha-1<1 \iff \alpha<2$

DUNQUE: $\iint_Q \frac{1}{\|(x,y)\|^\alpha}$ è $<+\infty$ se $\alpha\in\,]1,2[$

è $+\infty$ se $\alpha\geq 2$

$\boxed{\alpha\leq 1}$ Devo valutare con che ordine $g(x)\to+\infty$

$$g(x)=\int_{-r/x}^{r/x}\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha/2}} = 2\int_0^{r/x}\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha/2}} = H(r/x)$$

$$H(z)=2\int_0^z\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha/2}}$$

calcolo $g'(x)$, se $x\neq 0$, (Teorema fond. calcolo int.)

$$g'(x)=\frac{d}{dx}H(r/x) = H'(r/x)\left(-\frac{r}{x^2}\right) = \frac{-2}{\underbrace{\left(1+\left(\frac{r}{x}\right)^2\right)^{\alpha/2}}}\cdot\frac{r}{x^2}$$

$$=\frac{-2r}{|x|^2\left(\frac{x^2+r^2}{x^2}\right)^{\alpha/2}} = \frac{-2r}{(x^2+r^2)^{\alpha/2}}\,\frac{|x|^\alpha}{|x|^2} = \frac{-2r}{(x^2+r^2)^{\alpha/2}}|x|^{\alpha-2}$$

Questo mi dice che $g(x) \simeq |x|^{\alpha-1}$

infatti se faccio $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{|x|^{\alpha-1}}$, uso Hôpital, ho

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g'(x)}{(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}} \longrightarrow \text{NUMERO FINITO}$$

DUNQUE

$$\int_{-r}^{r} \frac{g(x)}{|x|^{\alpha-1}}\, dx \quad \text{è finito} \quad \forall \alpha \leq 1$$

dato che l'integrando è continuo anche in zero.

$$\Longrightarrow \quad \iint_{Q(r)} \frac{dx\,dy}{\|(x,y)\|^{\alpha}} < +\infty \iff \alpha < 2$$

$$\left(\text{ricordo che} \quad \int_{-r}^{r} \frac{dx}{|x|^{\alpha}} < +\infty \iff \alpha < 1 \right)$$

10 minuti di pausa

Con i calcoli fatti sopra abbiamo dimostrato che $f = \frac{1}{\|(x,y)\|^{\alpha}}$

è INTEGRABILE se $\alpha < 2$. Il calcolo fatto

ci permette di calcolare l'integrale (calcoli permettendo)

Se $\alpha = 1$ ho trovato

$$\iint_{Q(0,1)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1/x}^{1/x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \begin{aligned} t &= \sinh(\tau) \\ dt &= \cosh(\tau) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cosh^2(\tau) - \sinh^2(\tau) &= 1 \\ 1 + \sinh^2(\tau) &= \cosh^2(\tau) \end{aligned}$$

$$: \Rightarrow \quad \ldots \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{arcsinh}(t) \quad \Rightarrow$$

$$2\int_0^1 \operatorname{arcsinh}(1/x)\,dx$$

NON È CHIARO SE SI CALCOLA

IN ALTERNATIVA AI CALCOLI DELLA PRIMA PARTE POSSO USARE LE COORD POLARI per calcolare

$$\iint_{B(0,r)} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \qquad \text{dove } B(0,r) = \{\|(x,y)\| \le r\}$$

In questo modo "$dx\,dy = d\theta\,\rho\,d\rho$"

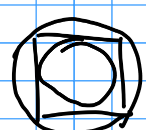
$$B(0,r) \longrightarrow \{\theta \in [0,2\pi],\ 0 \le \rho \le r\}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{\rho\,d\rho}{\rho^\alpha} = 2\pi \int_0^r \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-1}} = 2\pi \int_0^r \rho^{1-\alpha}\,d\rho$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha - 1 \ge 1 \iff \alpha \ge 2 \\ 2\pi \left[\dfrac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_0^r = 2\pi \dfrac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$

DUNQUE $\dfrac{1}{\|(x,y)\|^\alpha}$ è integrabile su $B(0,r) \iff \boxed{\alpha < 2}$

Posso riottenere l'integrabilità su Q_r (VISTA PRIMA) notando che dato $r>0$ esisto r_1 e r_2 tali che



$$\left(\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{2}\,r \\ r_1 &= \frac{r}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad \text{CREDO..} \right)$$

$$B(0,r_1) \subset Q(0,r) \subset B(0,r_2)$$

Ne segue che

$$\underline{\alpha < 2} \implies \int_{B(0,r_2)} f \, dxdy < +\infty \implies \int_{Q(0,r)} f \, dxdy < +\infty$$

$$\alpha \geq 2 \implies +\infty = \int_{B(0,r_1)} f \, dxdy \leq \int_{Q(0,r)} f \, dxdy \implies \int_{Q(0,r)} f \, dxdy = +\infty$$

RIOTTENGO QUANTO VISTO PRIMA: $\iint_{Q(0,r)} f \, dxdy < +\infty \iff \alpha < 2$

ANALOGAMENTE si vede che la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$$

è integrabile su $\{ \|(x,y)\| \geq r \} = \mathbb{R}^2 \setminus B(0,r)$

$\iff \alpha > 2$ (passando in coordinate polari è semplice)

Di conseguenza (usando r_1 e r_2 come prima)

f è integrabile fuori da $Q(0,r) \iff \alpha > 2$

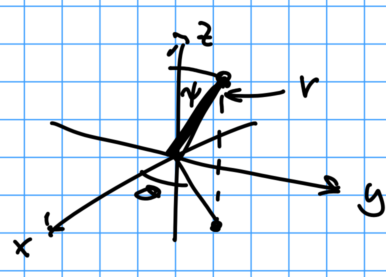
Proviamo a vedere in dimensione 3 cosa succede.

Domanda: $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}$ è integrabile

su $B(0,r) = \{ x^2+y^2+z^2 \leq r^2 \}$??

Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \sin\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$



$\phi(\rho, \theta, \psi) = \longrightarrow$ Mi serve $|\det J_\phi|$

$$J_\phi = \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\psi & -\rho\sin\theta\sin\psi & \rho\cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi & \rho\cos\theta\sin\psi & \rho\sin\theta\cos\psi \\ \cos\psi & 0 & -\rho\sin\psi \end{bmatrix}$$

$$|\det J_\phi| = \left| \rho^2 \sin\psi \, \underbrace{\det \begin{bmatrix} \cos\theta\sin\psi & \sin\theta & \cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi & \cos\theta & \sin\theta\cos\psi \\ \cos\psi & 0 & -\sin\psi \end{bmatrix}}_{\text{viene } 1 \ (-1)} \right| = \ldots$$

$\boxed{\rho^2 \sin\psi}$ $\qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \psi \leq \pi \quad \rho \geq 0)$

$$\Rightarrow \iiint_{B(0,r)} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)} \, dx = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\psi \int_0^{r} \frac{\sin\psi \, \rho^2 \, d\rho}{\rho^\alpha} =$$

$$2\pi \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\psi}_{2} \int_0^{r} \rho^{2-\alpha} \, d\rho = \frac{4\pi}{3-\alpha} \left[\rho^{3-\alpha} \right]_0^r \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha < 3 \\ +\infty & \alpha \geq 3 \end{cases}$$

DUNQUE $\frac{1}{\|P\|^\alpha}$ è integrabile su $B(0,r)$ $(\text{in } \mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \alpha < 3$

SI POTREBBE DIMOSTRARE CHE

$\frac{1}{\|x\|^\alpha}$ in $\mathbb{R}^N$ è integrabile su $B(0,r) \Leftrightarrow \alpha < N$

è integrabile su $\mathbb{R}^N \setminus B(0,r) \Leftrightarrow \alpha > N$

METTO DI NUOVO IN EVIDENZA: Anche il teorema di cambio di variabile ha $\underline{\underline{2}}$ enunciati.

① UNO per le funzioni ≥ 0 misurabile (con valore $+\infty$ ammesso)

② UNO per le funzioni integrabili.

Nei calcoli sopra abbiamo usato la versione ①

ESERCIZIO Domanda: esiste l'integrale ($\Leftrightarrow$ f è integrabile) dato che f cambia segno

$$f(x,y) \; \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{su } \{x^2+y^2 \geq 1\} =: D$$

OSS. f non è ≥ 0. f è ≥ 0 su $\geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

f è $\leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

RIPRENDIAMO DOMANI

$$\iint_A f(\phi(y)) \, |\det J_\phi(y)| \, dy = \int_B f(x) \, dx$$

dove $B = \phi(A)$
