Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 35 16/12/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$f : \mathbb{R}^{N+M} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to [-\infty,+\infty]$ (i punti di $\mathbb{R}^{N+M}$ li scrivo (x,y), $x \in \mathbb{R}^N$ $y \in \mathbb{R}^M$)

$\mapsto f(x,y)$

SUPPONGO f misurabile su $\mathbb{R}^{N+M}$

Teorema di Tonelli: se $f \geq 0$ (+ mis.) allora:

(a) per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione

$$y \mapsto f(x,y) \quad \text{è misurabile (in } y\text{) su } \mathbb{R}^M$$

(b) La funzione

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy$$

(che è definita per quasi ogni x – la posso mettere zero dove non è def.)

(può venire $+\infty$)

è misurabile (in x) su $\mathbb{R}^N$

(c)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \right) dx = \iint_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x,y)\,dx\,dy$$

esiste per (a) e (b)

esiste perché $f \geq 0$ misurabile su $\mathbb{R}^{N+M}$

Ricordo che "P(x) vale quasi ovunque" significa che
$\{x : P(x) \text{ non vale}\}$ ha misura nulla.

Teorema di Fubini

Supponiamo f INTEGRABILE

(a) per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione
$y \mapsto f(x,y)$ è integrabile (in y) su $\mathbb{R}^M$

(b) La funzione
$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy$ (che è definita per quasi ogni x - la metto come mi pare dove non è definita)
è integrabile (in x) su $\mathbb{R}^N$

(c) $$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \right) dx = \iint_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x,y)\,dx\,dy$$
(stavolta i valori sono FINITI)

OSS. Se valgono le ipotesi di Tonelli / Fubini $\Rightarrow$
$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dx \right) dy$$

SI POTREBBE FARE UN CONTROESEMPIO IN CUI l'eguaglianza sopra è falsa (mancando le ipotesi)

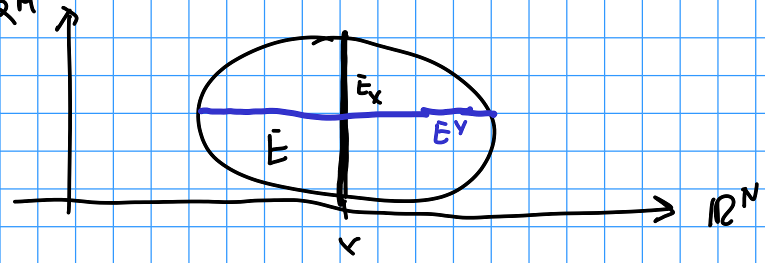
CASO PARTICOLARE DI TONELLI

Se $E \subset \mathbb{R}^{N+M}$ è misurabile allora

$$m_{N+M}(E) = \int_{\mathbb{R}^N} m_M(E_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^M} m_N(E^y)\,dy$$

dove $E_x = \{ y \in \mathbb{R}^M : (x,y) \in E \}$
$E^y = \{ x \in \mathbb{R}^N : (x,y) \in E \}$

sono misurabili per quasi ogni x / quasi ogni y (Tonelli)



Def. (insieme normale rispetto a un asse)

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \qquad x \in \mathbb{R}^N \quad x = (x', y) \quad x' \in \mathbb{R}^N \quad y \in \mathbb{R}$$

(y qui è l'ultima coordinata ma può essere anche una in mezzo)

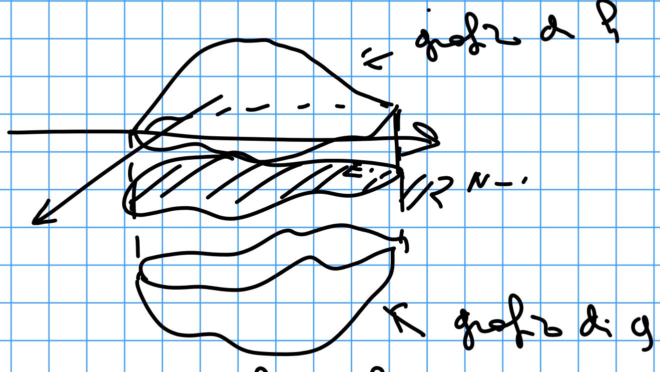
Sia $E \subset \mathbb{R}^N$. Dico che E è NORMALE RISPETTO all'asse y (all'asse N-ESIMO: $y = x_N$ $\;x' = (x_1 \dots x_{N-1})$) se esiste $E' \subset \mathbb{R}^{N-1}$ misurabile ed esistono $g, h : E' \to \mathbb{R}$ $\quad g \le h$ tali che

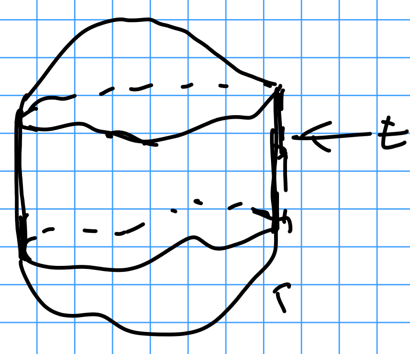
$$E = \{ (x', y) : \; x' \in E' \quad g(x) \le y \le h(x) \}$$

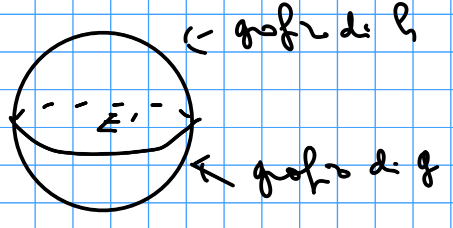
Per esempio $\quad E = B(0,1) = \{ x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \}$

$\Rightarrow$ E è normale rispetto all'asse z perché chiamo $E' = \{ x^2 + y^2 \le 1 \} \subset \mathbb{R}^2$ e posso scrivere

$$E = \{ (\underbrace{x, y}_{x'}, z) : \; (x,y) \in E' \quad \underbrace{-\sqrt{1-x^2-y^2}}_{g(x,y)} \le z \le \underbrace{\sqrt{1-x^2-y^2}}_{h(x,y)} \}$$







FATTO Se f è misurabile e ≥ 0 (o se f è integrabile) su E normale (caso dello spazio)

$$\Rightarrow \int_E f(x)\,dx = \int_{E'} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x',y)\,dy \right) dx'$$

IN PARTICOLARE (caso $f \equiv 1$)

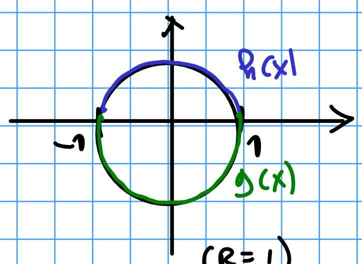
$$|E| = \int_{E'} \left(h(x') - g(x') \right) dx'$$

ESEMPIO Area del cerchio $B = \{x^2+y^2 \leq R^2\}$

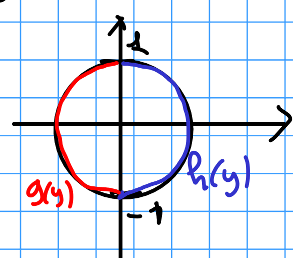
B è normale rispetto y / anche rispetto a x

$$B = \left\{ (x,y) : -1 \leq x \leq 1 ,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\} \quad (\text{rispetto a } y)$$

$$= \left\{ (x,y) : -1 \leq y \leq 1 ,\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \right\} \quad (\text{rispetto a } x)$$



oppure



$$\Rightarrow |B| = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

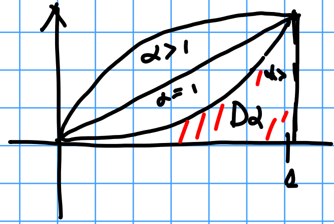
$$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$4 \arcsin(x)\Big|_0^1 + 4\int_0^1 x \underbrace{\frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}}}_{\text{PRIMITIVA DI } \sqrt{1-x^2}} dx \overset{\text{(per parti)}}{=} 2\pi + 4\underbrace{\left[x\sqrt{1-x^2} \right]_0^1}_{=0} - 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(2\pi \right) = \pi \quad (\text{in generale trovo } \pi R^2)$$

ESERCIZIO $I = \iint_{D_\alpha} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$ ← VOGLIO SAPERE per quali α è finito

$D_\alpha = \{ 0 \leq x \leq 1 ,\ 0 \leq y \leq x^\alpha \}$ $(\alpha > 0)$



OSSERVO CHE L'INTEGRANDO È CONTINUO SU $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\Rightarrow$ è misurabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\Rightarrow$ è misurabile su $\mathbb{R}^2$

(l'integrando VALE $+\infty$ in $(0,0)$ - IN REALTÀ NON CONTA COME LO METTO IN $(0,0)$ dato che $\{(0,0)\}$ è trascurabile) D_α è NORMALE RISPETTO A X

POSSO APPLICARE TONELLI :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{x^\alpha} \frac{dy}{(x^2+y^2)^2} \right) dx =$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4} \left(\int_0^{x^\alpha} \frac{dy}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2} \right)$$

cambio di variabile $\frac{y}{x}=t$ $y=tx$ $dy = x\,dt$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3} \int_0^{x^{\alpha-1}} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

NON VOGLIO CALCOLARE L'INT. IN t MA SOLO VEDERE SE CIÒ CHE HO DAVANTI È FINITO O MENO

$$= \int_0^1 \frac{g(x)}{x^3}\,dx \qquad \text{dove } g(x) = \int_0^{x^{\alpha-1}} \varphi(t)\,dt \qquad \varphi(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

NOTO CHE $g(x)$ esiste $\forall x>0$ ed è continua.

SERVE CAPIRE COSA FA $g(x)$ per $x \to 0$ DIPENDE DA α

- Se $\boxed{\alpha>1}$ allora $x^{\alpha-1} \to 0$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ $g(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$

ANZI POSSO DIRE CHE

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \int_0^{x^{\alpha-1}} \varphi(t)\,dt = \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{s}\int_0^s \varphi(t)\,dt = \varphi(0) = 1$$

DUNQUE $g(x) \simeq x^{\alpha-1}$. Allora

$$\frac{g(x)}{x^3} \simeq \frac{x^{\alpha-1}}{x^3} = \frac{1}{x^{4-\alpha}} \leftarrow \text{è integrabile} \Leftrightarrow 4-\alpha<1$$

(VICINO A ZERO) CIOÈ $\alpha>3$

DUNQUE per $\alpha>3$ I è finito,

per $1<\alpha\le 3$ $I = +\infty$

• Se $\alpha = 1$ IN QUESTO CASO

$$g(x) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt \quad \text{è costante} = c$$

$$I = \int_0^1 \frac{c}{x^3}\,dx = +\infty$$

• Se $\alpha < 1$ $\quad x^{\alpha-1} \to +\infty$ per $x \to 0 \implies$

$$g(x) = \int_0^{x^{\alpha-1}} \varphi(t)\,dt \xrightarrow{x \to 0} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \in \mathbb{R}$$

IN OGNI CASO $g(x)$ è crescente $\implies g(x) \geq g(1) = \int_0^1 \varphi = c_1$

$$\implies I \geq \int_0^1 \frac{c_1}{x^3}\,dx = +\infty$$

IN DEFINITIVA $\displaystyle\int_{D_\alpha} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^2} < +\infty \iff \boxed{\alpha > 3}$

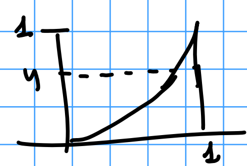
(D_α ha una "cuspide" in $(0,0)$

)

Si potrebbe vedere che $\displaystyle\iint_B \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^2} = +\infty$ se $B = \{x^2+y^2 \leq \varepsilon\}$

- PROVARE A DIMOSTRARLO (con le coordinate polari - vedi dopo)
- ESERCIZIO TROVARE LO STESSO RISULTATO RAGIONANDO nell'altro verso

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y^{\frac{1}{\alpha}}}^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} \right) dy \ \ldots$$



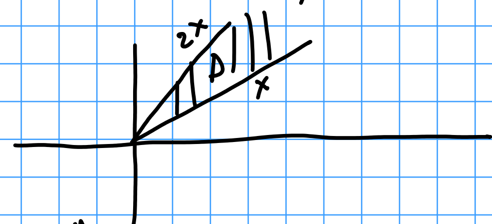
$y \leq x^\alpha$

$y^{\frac{1}{\alpha}} \leq x$

HO USATO TONELLI

EX. $\displaystyle\iint_D \underbrace{\sin(xy)\, e^{-xy}} \,dx\,dy \qquad D = \{0 \leq x \leq y \leq 2x\}$

ESISTE ?!

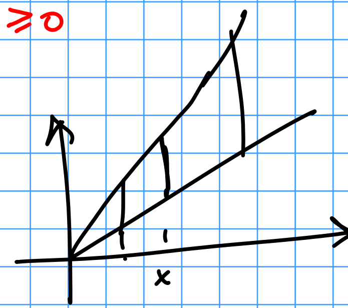


La domanda $\to \sin(xy)\,e^{-xy} \in L^1(D) \iff \overbrace{|\sin(xy)\,e^{-xy}|}^{\geq 0} \in L^1(D)$

$\Leftarrow \quad e^{-xy} \in L^1(D)$ perché $|\sin(xy)e^{-xy}| \le e^{-xy}$

$\underbrace{\phantom{e^{-xy} \in L^1(D)}}$ Provo a dimostrare questo.

POSSO USARE TONELLI' perché e^{-xy} è continuo $\Rightarrow$ misurabile ed è ≥ 0



$$\iint_D e^{-xy}\, dx\, dy < \infty \ ??$$

$$\| $$

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{2x} e^{-xy} dy \right) dx =$$

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{e^{-xy}}{-x} \right]_x^{2x} dx = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x^2} - e^{-x^2}}{x} dx =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2} - e^{-2x^2}}{x} dx \quad \text{è finito ??}$$

OSS. • in $x=0$ l'integrando $\to 0$ (Hôpital)

$$\frac{e^{-x^2} - e^{-2x^2}}{x} = \frac{1 - x^2 + o(x^2) - (1 - 2x^2 + o(x^2))}{x} =$$

$$\frac{x^2 + o(x^2)}{x} = x + o(x)$$

• all'infinito gli esponenziali rendono entrambi i termini integrabile

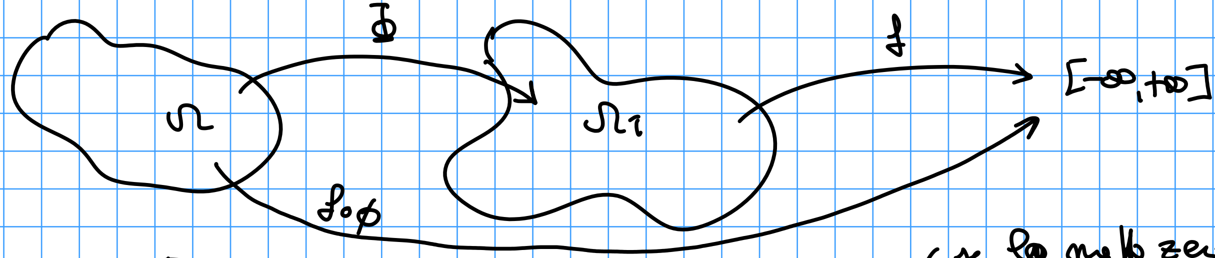
$\Rightarrow \quad e^{-xy}$ è integrabile su D (D è ILLIMITATO !!!)

$\Rightarrow \quad \sin(xy)\, e^{-xy}$ è integrabile su D #

TEOREMA DI CAMBIO DI VARIABILE

$\Omega \subset \mathbb{R}^N \qquad \Omega_1 \subset \mathbb{R}^N \qquad \Omega_1$ e Ω aperti

$\Phi : \Omega \to \Omega_1$ bigettivo e di classe C^1



$f : \Omega_1 \to [-\infty,+\infty]$ misurabile su Ω_1 (se la metto zero fuori da Ω_1 è misurabile)

ALLORA

- $(f\circ\phi)\cdot|\det J_\phi|$ è misurabile su Ω E valgono sia (1) che (2)
- (1) Se $f \geq 0$ vale

$$\int_\Omega f(\phi(x))\,|\det J_\phi(x)|\,dx = \int_{\Omega_1} f(y)\,dy$$

(VALORI $+\infty$ AMMESSI)

(2) Se f è integrabile su Ω_1 $\Rightarrow$
$f\circ\phi\,|\det J_\phi|$ è integrabile su Ω e vale la stessa formula

$$\int_\Omega f(\phi(x))\,|\det J_\phi(x)|\,dx = \int_{\Omega_1} f(y)\,dy$$

(VALORI FINITI)

ESEMPIO (Coordinate polari) In $\mathbb{R}^2$ considero

$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad \rho \geq 0 \qquad \theta\in\mathbb{R}$

DUNQUE STO CONSIDERANDO $(x,y) = \phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

- ϕ è C^1
- $J_\phi(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta, & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta, & \rho\cos\theta \end{bmatrix} \longrightarrow \det J_\phi(\rho,\theta) = \rho\cdot 1 = \boxed{\rho}$

$\phi : \{\rho\geq 0, \theta\in\mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2$

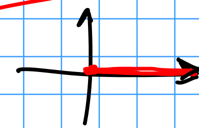
- ϕ NON È BIGETTIVA, per vari motivi (è surgettiva su $\mathbb{R}^2$)
  - Se $\rho = 0$ per ogni θ $\phi(0,\theta) = (0,0)$
  - $\phi(\rho,\theta) = \phi(\rho,\theta+2k\pi) \quad \forall k\in\mathbb{Z}$

Sarei nelle ipotesi x mi metterei in

$\Omega = \{ \rho > 0 \ , \ 0 < \theta < 2\pi \} \implies$

$$\iint_{\{\rho>0,\ 0<\theta<2\pi\}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,y$$

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \quad x \geq 0\}$.



(per ogni $f : \Omega_1 \to [-\infty, +\infty]$ integrabile / $f \geq 0$ misurabile)

IN REALTÀ POSSO SCRIVERE

$$\iint_{\{\rho\geq 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,y \quad \leftarrow \boxed{\times}$$

$\forall\ f$ misurabile (≥ 0 / integrabile) su $\mathbb{R}^2$

PERCHÉ $E = \{(x, 0) \quad x \geq 0\}$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^2$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2\setminus E} f(x,y)\,dx\,dy = \iint f(\rho \ldots \quad = -$$

$\boxed{\times} \implies$ Se considero $f = \tilde{f} \cdot \mathbb{1}_E$ posso passare a integrare su un sottoinsieme E misurabile

ESEMPI Di nuovo l'area del cerchio

$B = \{ x^2 + y^2 \leq R^2 \}$ Applico $\boxed{\times}$ con $f = \mathbb{1}_B$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x,y)\,dx\,dy = \iint_B 1\,dx\,dy = |B|$$

$$\iint_{\left\{\substack{\rho\geq 0 \\ 0\leq\theta\leq 2\pi}\right\}} \mathbb{1}_B(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta =$$

$\rho^2\cos^2 + \rho^2\sin^2 \leq R^2 \implies \rho \leq R$

$$\iint_{\substack{0\leq\rho\leq 1 \\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \rho\, d\rho\right) d\theta = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2$$

EX $\quad I = \iiint_D \frac{z \, dx\, dy\, dz}{1+x^2+y^2+z^2} \qquad D = \{ x^2+y^2+z^2 \le 1 \, , \, z \ge 0 \}$

VEDO D come normale rispetto all'asse z:

$$D = \{ (x,y) \in B \, , \; \overset{g(x,y)}{0} \le z \le \overset{h(x,y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \}$$

$$B = \{ x^2+y^2 \le 1 \}$$

$$I = \iint_B \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z\, dz}{1+x^2+y^2+z^2} \right) dx\, dy \qquad s = z^2 \quad ds = 2z\, dz$$

(nell'integrale interno)

$$= \frac{1}{2} \iint_B \left(\int_0^{1-x^2-y^2} \frac{ds}{1+x^2+y^2+s} \right) dx\, dy =$$

$$\frac{1}{2} \iint_B \left[\ln(1+x^2+y^2+s) \right|_0^{1-x^2-y^2} dx\, dy =$$

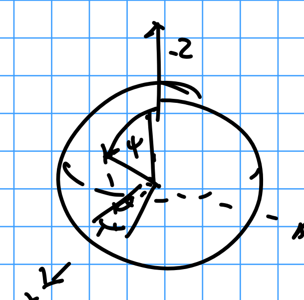
$$\frac{1}{2} \iint_B \left(\ln(2) - \ln(1+x^2+y^2) \right) dx\, dy \qquad \text{coordinate polari}$$

$$\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^1 \ln\left(\frac{2}{1+\rho^2}\right) \rho\, d\rho \qquad \sigma = \rho^2 \quad d\sigma = 2\rho\, d\rho$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^1 \ln\left(\frac{2}{1+\sigma}\right) d\sigma = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \ln\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) d\sigma \qquad u = \frac{1+\sigma}{2} \quad du = \frac{d\sigma}{2}$$

$$-\pi \int_{1/2}^1 \ln(u)\, du = -\pi \left[u \ln(u) \right]_{1/2}^1 + \pi \int_{1/2}^1 1\, du =$$

$$+\frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}\left(1 - \ln(2)\right)}$$



Si potevo fare in coordinate sferiche:

$$\Phi(\rho,\theta,\psi) \begin{cases} x = \rho \cos\theta \sin\psi \\ y = \rho \sin\theta \sin\psi \\ z = \rho \cos\psi \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \psi \le \pi \end{matrix} \qquad \rho \ge 0$$

Si vede che $J_\phi(\rho, \theta, \psi) = \rho^2 \sin\psi$ VERIFICARE

$$\Rightarrow \quad I = \iiint_D \frac{z \, dx \, dy \, dz}{1 + x^2 + y^2 + z^2} =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^1 \frac{\rho \cos\psi}{1 + \rho^2} \rho^2 \sin\psi \, d\rho =$$

$$2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\psi \cos\psi \, d\psi \int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2} d\rho = \quad \sigma = \rho^2$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\psi \, d\psi \int_0^1 \frac{\sigma}{1+\sigma} d\sigma =$$

$$\frac{\pi}{2} \underbrace{\left[\frac{-\cos 2\psi}{2} \right]_0^{\pi/2}}_{\frac{2}{2}} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+\sigma} \right) d\sigma =$$

$$\frac{\pi}{2} \left[\sigma - \ln(1+\sigma) \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \ln(2) \right)$$ TORNA

BUONE VACANZE