Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

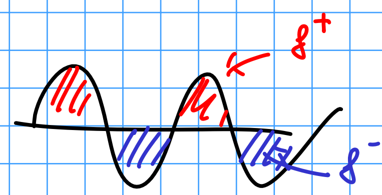
Lezione 34 15/12/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

- INTRODOTTO LA NOZIONE DI
  INSIEME MISURABILE ($E \subset \mathbb{R}^n$) / MISURA $m(E)$ se è misurabile

- FUNZIONI MISURABILI:



ENTRAMBI I "SOTTOGRAFICI" MISURABILI IN $\mathbb{R}^{N+1}$

- INTEGRALE:

(a) se f è misurabile $f : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty]$ (≥ 0)

allora $\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx := m\{\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^N,\ 0 \leq y \leq f(x)\}\}$

(b) se $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$ dico che f è integrabile su $\mathbb{R}^N$ se f è misurabile e se

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^+ < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}^N} f^- < +\infty$$

In tal caso $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)\,dx$

<u>Notazione</u> Indico $L^1(\mathbb{R}^N) = \{$ funzioni integrabili su $\mathbb{R}^N \}$

<u>Nota</u> Se $f \geq 0$, misurabile, ho integrale ma non è detto che sia integrabile ($\int_{\mathbb{R}^N} f$ può essere $+\infty$)

<u>Def.</u> $E \subset \mathbb{R}^N$ e $f : E \to [-\infty, \infty]$. Dico che f è <u>misurabile su E</u> se la funzione $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$, def. da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

è misurabile. Analogamente f si dice integrabile su E se $\tilde{f}$ è integrabile su $\mathbb{R}^N$. Scrivo

$$\int_E f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x)\,dx \qquad \left(\begin{array}{l} \text{ha senso se } f \geq 0 \text{ misurabile} \\ \text{o } f \text{ integrabile} \end{array} \right)$$

Scrivo $L^1(E) = \{$ funzioni integrabili su $E \}$

<u>OSS.</u> Se $E \subset \mathbb{R}^N$ E misurabile e se $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$ f misurabile, allora la restrizione di f su E è misurabile su E. Inoltre se definisco

$$\mathbb{1}_E : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty[\qquad \mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

allora

$$E \text{ misurabile} \iff \mathbb{1}_E \text{ misurabile} \quad \text{e}$$

$$|E| = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_E = \int_E 1$$

#

<u>PROPRIETÀ</u> (misurabilità e integrabilità delle funzioni)

CONSIDERO $f, g : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$, MISURABILI (se non dico altrimenti)

(a) $f \geq g \geq 0 \implies \int_{\mathbb{R}^N} f \geq \int_{\mathbb{R}^N} g \ (\geq 0)$ ANCHE CON VALORI $+\infty$

(a1) Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow f \geq g \Rightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} f \geq \int_{\mathbb{R}} g}_{\text{FINITI}}$

(c.1) Se $f \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^N} f = 0 \Longrightarrow$

$\{x : f(x) > 0\}$ ha misura nulla ($f = 0$ quasi ovunque)

(c.2) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow$

$\{x : |f(x)| = +\infty\}$ ha misura nulla

f è quasi ovunque finita

(b) (Linearità dell'integrale)

$\underbrace{f \geq 0,\ g \geq 0 \quad \lambda\ \mu \geq 0,}$ $(f, g : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty])$

$\Rightarrow \lambda f + \mu g$ è misurabile e

$$(L) \quad \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f + \mu \int_{\mathbb{R}^N} g$$

ATTENZIONE D'ora in poi facciamo la seguente CONVENZIONE

$$0 \cdot \infty = 0 \quad !!$$

con questa convenzione nella formula (L) ammetto anche valori $+\infty$, fermo restando che

- $\lambda f(x) / \mu g(x) = 0$ se $\lambda = 0 / \mu$ anche se $f(x) = +\infty / g(x) +\infty$
- stesso discorso a destra della formula

(b.1) Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ $\lambda\ \mu \in \mathbb{R}$ allora $\lambda f + \mu g \in L^1$

e vale (L) (con valori finiti)

ATTENZIONE L'integrando $\lambda f(x) + \mu g(x)$ potrebbe avere la forma

$+\infty - \infty$ (se $\lambda = 1$ $\mu = 1$ $f(x) = +\infty$, $g(x) = \infty$). PERÒ

i PUNTI x in cui questo accade sono contenuti nell'

insieme $\{x : |f(x)| = +\infty\} \cap \{x \mid g(x)| = \infty\}$ ← ha misura nulla
per cons. di (C.2)

COME VEDIAMO SUBITO IO POSSO definire come mi pare

$\lambda f(x) + \mu g(x)$ in tali punti

Qualunque valore metto la formula (L) vale

(d) Se E ha misura nulla e se $f(x) = g(x)$ $\forall x$ fuori da E

($\{x : f(x) \neq g(x)\}$ ha misura nulla) | Se $f = g$ quasi ovunque ...

Allora f misurabile $\Leftrightarrow$ g misurabile

f integrabile $\Leftrightarrow$ g integrabile e

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} g$$

Def. Se una proprietà $p(x)$ è vera per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus E$

con $|E| = 0$ dico che "$p(x)$ vale per quasi ogni x"

o anche che "p vale quasi ovunque"

(e) Se $f = 0$ quasi ovunque ($\{x : f(x) \neq 0\}$ ha misura nulla)

$\Rightarrow$ f è integrabile (in particolare è misurabile) e $\int_{\mathbb{R}^N} f = 0$

(f) Se $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto, f continua

$\Rightarrow$ f è misurabile su A ($\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{su } A \\ 0 & \text{fuori } A \end{cases}$ è misurabile)

(f1) Se $f : C \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N$ chiuso, f continua

$\Rightarrow$ f è misurabile su C. Se C è anche limitato

$\Rightarrow$ f è integrabile su C.

(a.3) Se $f \geq g \geq 0$ (misurabili) e f è integrabile

$\Rightarrow$ g è integrabile (È CONSEGUENZA DI (a1))

(g) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann
(f limitata)

$\Rightarrow$ f è (misurabile e) integrabile e

$$\int_{\mathcal{R}} f = \int_{\mathcal{L}} f$$

(g) Se $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad I \subset \mathbb{R}$ intervallo e

f è assolutamente integrabile in senso improprio (Riemann)

$\Rightarrow$ $f \in L^1$ e gli integrali sono gli stessi.

ATTENZIONE Se f è int. in senso improprio MA NON ASSOLUTAMENTE

$\Rightarrow$ f NON è in L^1 $\quad \left(\int f^+ = +\infty \quad \int f^- = +\infty \right)$

$\frac{\sin(x)}{x}$ non è integrabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}$

(0 in $x=0$) — (È MISURABILE)

INTEGRALI ITERATI

Supponiamo $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$. Conveniamo di scrivere $f(x,y)$ in cui $x \in \mathbb{R}^N$ $\quad y \in \mathbb{R}^M$

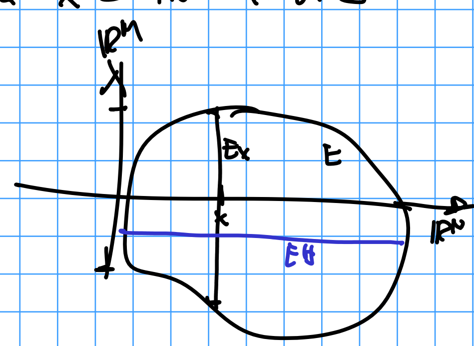
$x = (x_1 \cdots x_N) \qquad y = (y_1 \cdots y_M)$

PROBLEMA
$$\iint_{\mathbb{R}^{N+M}} \underbrace{f(x,y)}_{P} \underbrace{dx\,dy}_{dP} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \right) dx \quad ??$$

oltre a chiederci se vale dobbiamo chiederci se ha senso

Def. Sia $E \subset \mathbb{R}^{N+M} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ indico

$$E_x = \{ y \in \mathbb{R}^M : (x,y) \in E \}$$



Analogamente dato $y \in \mathbb{R}^M$

$$E^y = \{ x \in \mathbb{R}^N : (x,y) \in E \}$$

CI SONO DUE TEOREMI MOLTO SIMILI

TEOREMA DI TONELLI Sia $f : \mathbb{R}^{N+M} \to [0,+\infty]$ (≥ 0!!) misurabile. Allora sono veri i fatti seguenti

(a) Per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione

$$y \mapsto f(x,y) \qquad (\text{va da } \mathbb{R}^M \to [0,+\infty])$$

è misurabile (in y)

(b) Se considero la funzione di x:

$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\, dy$$

questa funzione è definita per quasi ogni x (a causa di (a))
LA DEFINISCO COME MI PARE (ZERO?) DOVE L'INTEGRANDO NON È MISURABILE

È MISURABILE (in x!)

(c) $$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\, dy \right) dx}_{\text{ha senso per (b)}} = \underbrace{\iint_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x,y)\, dx\, dy}_{\text{HA SENSO per ipotesi}}$$

(in questa formula posso trovare $+\infty = +\infty$)

TEOREMA DI FUBINI $\longrightarrow$ domani