Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 33 14/12/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

INTEGRAZIONE IN $\mathbb{R}^N$

Problema dell'area / volume / misura N-dim. in $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3 / \mathbb{R}^N$:

Dato $E \subset \mathbb{R}^N$ gli voglio associare $|E| = m(E) \in [0, +\infty]$

con delle proprietà "naturali"

- Se $E_1 \subset E_2$ $0 < |E_1| \leq |E_2|$
- Se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ $|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$

\+ altro ecc. (invarianza per "movimenti rigidi")

($\longrightarrow$ NOZIONE DI INTEGRALE)

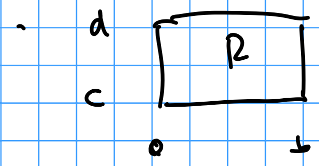
FATTO Siamo tutti d'accordo sulla misura dei rettangoli.

Def. Chiamo N-rettangolo un insieme $R \subset \mathbb{R}$ dato da
$R = I_1 \times \cdot \cdot \times I_N$ dove $I_i \subset \mathbb{R}$ è un intervallo

(ammettiamo anche intervalli illimitati). In altri termini:

$$R = \{(x_1 \dots x_N) : x_1 \in I_1 \dots x_N \in I_N\}$$

(nel caso $N = 2$ ho i rettangoli "tradizionali" $R = [a, b] \times [c, d]$



Def. Se $R = I_1 \times \dots \times I_N$ definisco la N-misura di R:

$$\otimes \qquad m(R),\ m_N(R),\ |R| = |I_1| \cdot |I_2| \cdots |I_N|$$

dove $|I| = \sup I - \inf I$ (se $I = [a,b]$ $|I| = b-a$
$I = (a,b)$ $|I| = b-a$)

$|I| \in [0, +\infty]$

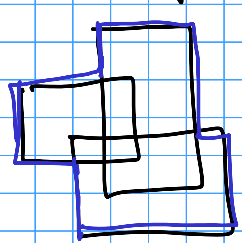
ATTENZIONE: CONVENIAMO CHE, se in $\otimes$ uno dei $|I_i|$ fa zero, allora $|R| = 0$ (anche se ci sono degli I_j con $|I_j| = +\infty$)
(per esempio, il piano x, y è un rettangolo in $\mathbb{R}^3$ con misura zero)

- Se $|I_i| > 0$ $\forall i = 1..N$, $|R| = +\infty$ se uno degli I_i ha misura $+\infty$.

Notazione Chiamo $\mathcal{R}_N$ = { rettangoli di $\mathbb{R}^N$ }
$\mathcal{R}_N^*$ = { rettangoli LIMITATI di $\mathbb{R}^N$ }

Sviluppo naturale: i plurirettangoli

Def. Se $P \subset \mathbb{R}^N$ dico che P è un plurirettangolo "finito e limitato" se $P = R_1 \cup \dots R_K$ dove $\underbrace{R_1 .. R_K}_{\text{sono un numero finito e sono tutti limitati}} \in \mathcal{R}_N^*$

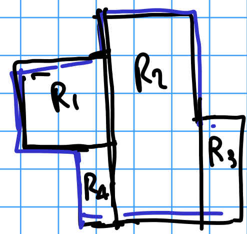


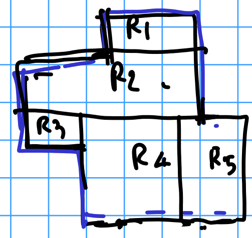
Chiamo $\mathcal{P}_N^*$ = { plurirettangoli finiti e limitati }

PROPRIETÀ Sia $P \in \mathcal{P}_N^*$. Allora

① $\exists\ R_1 .. R_K \in \mathcal{R}_N^*$ tali che

$$\boxed{P = R_1 \cup \dots \cup R_K}, \quad \boxed{R_i \cap R_j \subset \partial R_i \cap \partial R_j} \quad \text{se } i \neq j$$





② Se $R_1 \dots R_K$ e $R'_1 \dots R'_{K'}$ verificano la proprietà ①, con lo stesso $P \in \mathcal{P}^*_N$ $\Rightarrow$

$$|R_1| + \dots + |R_K| = |R'_1| + \dots + |R'_{K'}|$$

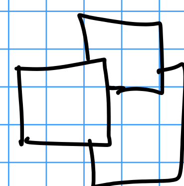
Def. Se $P \subset \mathcal{P}^*_N$ definisco la misura di P

$$m(P) = m_N(P) = |P| = \sum_{i=1}^{K} |R_i|$$

dove gli R_i sono come in (1)

$0 \le m_N(P) < +\infty$ perché P è finito e limitato

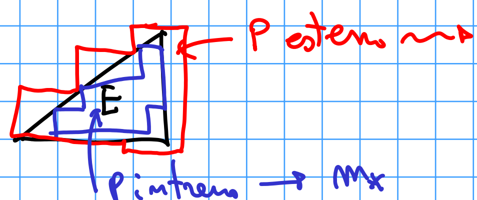
Siamo arrivati a misurare i plurirettangoli!



Def. (misura di Peano) Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ E limitato

Definisco la misura esterna / interna, secondo Peano (Riemann), di E

$$m^*_P(E) = \inf\{|P| : P \in \mathcal{P}^*_N, \ E \subset P\}$$
$$m_{*P}(E) = \sup\{|P| : P \in \mathcal{P}^*_N, \ P \subset E\}$$



DUNQUE $\forall E \subset \mathbb{R}^N$, E limitato ho definito

$$0 \le m_{*,P}(E) \le m^*_P(E) < +\infty$$

OSS. Può succedere che $m_{*P}(E) < m^*_P(E)$. Per esempio

$\hat{E} \subset \mathbb{R}$ è definito da $\hat{E} := \{x \in \mathbb{R}$ con $0 \le x \le 1$, x razionale$\}$

Si vede che:

① se R è un rettangolo (cioè un intervallo) $R \subset \hat{E}$ $\Rightarrow$ R è un punto (o è ϕ) $\{q\}$ con $q \in \hat{E}$
(se R avesse due punti distinti $\Rightarrow$ avrebbe un numero irrazionale)
$\Rightarrow$ $m_{*,P}(\hat{E}) = 0$

② Se P è un plurirettangolo con $\hat{E} \subset P$ $\Rightarrow$ $[0,1] \subset P$
$\Rightarrow$ $m^*_P(\hat{E}) \geq 1$ (si vede subito che $m^*_P(\hat{E}) = 1$ prendendo $P = [0,1]$)

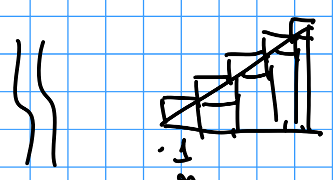
DUNQUE

$$m_*(\hat{E}) = 0 < 1 = m^*(\hat{E})$$

Def. Dico che $E \subsetneq \mathbb{R}^n$, limitato è misurabile secondo Peano (secondo Riemann) se $m^*_P(E) = m_{*P}(E)$.

Quando ciò avviene scrivo $E \in \mathcal{M}_P$ ($\mathcal{M}_P = \{$misurabili sec. Peano$\}$)
e scrivo anche $m_P(E)$ invece di $m^*_P(E)$ / $m_{*P}(E)$)
Scriverò anche più semplicemente $|E|$ se tutto è chiaro dal contesto

Per esempio si vede che $m(\text{TRIANGOLO}) = \dfrac{\text{base} \times \text{altezza}}{2}$



... faccio una approssimazione con plurirettangoli e faccio tendere $n \to \infty$

$\rightsquigarrow$ RITROVO TUTTE LE FIGURE GEOMETRICHE SOLITE e le relative formule.

TROVO ANCHE:

PROP. Se $A, B \in \mathcal{M}_P \Rightarrow A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \in \mathcal{M}_P$
Inoltre se $A \cap B = \phi \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$
(ADDITIVITÀ SEMPLICE)

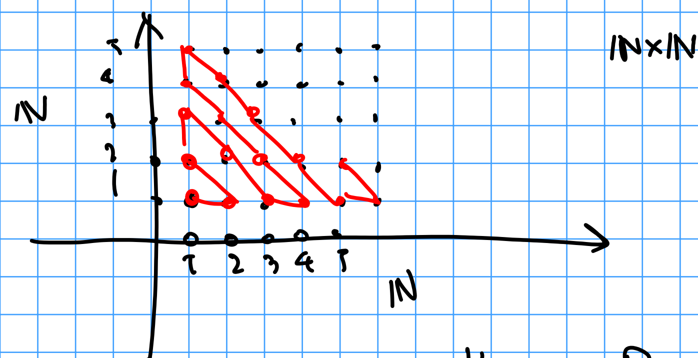
Questa nozione di misura ha un grosso difetto quando si fanno "operazioni di limite" o unioni e intersezioni INFINITE (MA NUMERABILI)

CONTROESEMPIO Torniamo su $\hat{E} = \{0 \le q \le 1,\ q \in \mathbb{Q}\}$

E' NOTO che $\mathbb{Q}$ è "numerabile", cioè esiste una successione $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad n \mapsto q_n \in \mathbb{Q}$ tale che

$$\{q_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \qquad \text{(CANTOR)}$$

IDEA: seguire la diagonale in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$



METTO IN FILA TUTTE LE COPPIE (n, m)

Trovo una successione $k \to P_k \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

cioè $k \to (n_k, m_k)$ e ogni (n, m) è P_k per un k

Ho $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bigettiva. $\Rightarrow$

trovo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ surgettiva . . .

Dato quanto detto so $\hat{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}$ per una opportuna successione q_n

DUNQUE $\hat{E}$ (che non è misurabile) è UNIONE NUMERABILE di PUNTI (e i punti hanno mis=0)

Questo è un fenomeno che non mi piace: un limite di misurabili non è misurabile. Potrei in effetti definire

$\hat{E}_n = \{q_1 \dots q_n\}$ $\quad \hat{E}_n$ è misurabile, $|\hat{E}_n| = 0$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \hat{E}_n = \hat{E}$ non misurabile

---

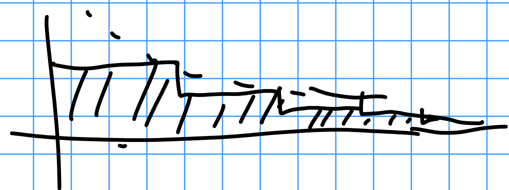
CERCO UNA DEFINIZIONE PIÙ GENERALE DI MISURA (misura di Lebesgue)

IDEA Considero $\mathcal{P}_N = \{ P \subset \mathbb{R} : P = \bigcup_{i=1}^{N} R_i ,\ R_i \in \mathcal{R}_N \}$

pluri-rettangoli (infiniti o non necessariamente limitati)

e $|P| = \sum_{i=1}^{\infty} |R_i|$ dove $R_i \in \mathcal{R}_N$ e $P = \bigcup R_i$, $R_i \cap R_j \subset \partial R_i \cap \partial R_j$

(indipendente dagli R_i ...)



FACCIO IN MODO LEGGERMENTE DIFFERENTE

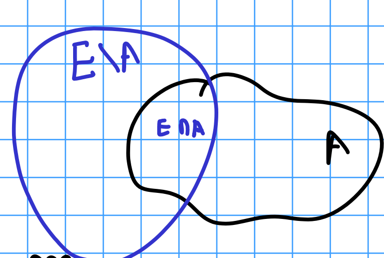
Def. Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ (non per forza limitato). Chiamo misura esterna (secondo Lebesgue) di E

$$m^*_{\mathcal{L}}(E) = m^*(E) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |R_n| ,\ R_n \in \mathcal{R}_N ,\ E \subset \bigcup R_n \right\}$$

(non definisco la misura esterna) $\boxed{0 \le m^*(E) \le +\infty}$

Def. Dico che $A \subset \mathbb{R}^N$ è <u>misurabile</u> secondo Lebesgue (e scrivo $A \in \mathcal{M}_N = \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^N)$) se

$$\forall E \subset \mathbb{R}^N \text{ si ha } m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$$



A "spezza bene" ogni $E \subset \mathbb{R}^N$

Def. Se $E \in \mathcal{M}$ scrivo $m(E)$ o $|E|$ invece di $m^*(E)$
(m è la restrizione di m^* su $\mathcal{M}$).

$m^*(E)$ è definita $\forall E$

$m(E)$ è definita solo se $E \subset \mathfrak{M}$

la chiamo misura (e basta)

Da questa costruzione ottengo parecchie proprietà:

(PAUSA $\rightarrow$ 16.20)

PROPRIETÀ DELLA MIS. ESTERNA

① $m^*(E) \geq 0$, $E_1 \subset E_2$ $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$ (MONOTONIA)

② (Subadditività numerabile)

Se $E_n \in \mathbb{R}^n$ $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) \in [0,+\infty]$

(quando scrivo $\sum a_n$ con $a_n \geq 0$ la serie ha sempre senso, con valori in $[0,+\infty]$)

③ m^* è invariante per traslazioni e rotazioni

PROPRIETÀ DEI MISURABILI E DELLA MISURA

④ Se A_n sono misurabili ($n \in \mathbb{N}$) $\Longrightarrow$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ sono misurabili.

Inoltre se $A, B \in \mathfrak{M} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{M}$

} $\mathfrak{M}$ è "σ - ALGEBRA"

⑤ Se A_n sono misurabili e $A_n \cap A_m = \emptyset$ per $n \neq m$

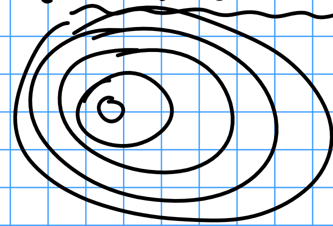
$\Rightarrow$ ($A = \bigcup_1^{\infty} A_n$ è mis per (4)) e

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$ (ADDITIVITÀ NUMERABILE)

(può essere anche $+\infty = +\infty$)

(5.1) Se $A_n \in \mathfrak{M}$ $A_n \subset A_{n+1}$ (A_n crescono) $\Rightarrow$

Posto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (c'è un'unione crescente)



($A \in \mathcal{M}$ per (4))

$$\Rightarrow \quad m(A) = \lim_{n \to \infty} m(A_n)$$

$m(A_n) \nearrow m(A)$

(5.2) A_n misurabile. $A_n \supset A_{n+1}$

$m(A_1) < +\infty$. Posto $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ (intersezione decrescente)

$A \in \mathcal{M}$ (per (4)) e $m(A) = \lim_{n \to \infty} m(A_n)$

$m(A_n) \searrow m(A)$

Ci vuole $m(A_1) < +\infty$ se no potrei avere un controesempio

(6) Se $R \in \mathcal{R}_N \Rightarrow R \in \mathcal{M}$ e $m(R) = |R|$

(6.1) stesso discorso per i plurirettangoli:

se $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ $\quad R_n \cap R_m = \emptyset \Rightarrow P \in \mathcal{M}$

e $m(P) = \sum_{n=1}^{\infty} |R_n|$

(6.2) Se $E \subset \mathbb{R}^N$, E è misurabile secondo Peano (E limitato)

$$\Rightarrow E \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad m_{\mathcal{L}}(E) = m_P(E)$$

Questo mi autorizza a scrivere $|E|$ invece di $m_{\mathcal{L}}(E)$ dato che non c'è ambiguità

OSS. L'INSIEME $\hat{E}$ di primo non è in $\mathcal{M}_P$ (come abbiamo visto) ma è misurabile per Lebesgue e la sua misura è zero. Infatti

$\hat{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$ $\quad$ ($q_n \neq q_m$ se $n \neq m$)

$\forall n$ $\{q_n\}$ è misurabile (è un rettangolo di misura zero)

e quindi per le proprietà sopra $\hat{E}_\infty \in \mathcal{M}$ e

$$|\hat{E}| = \sum_{n=1}^{\infty} |\{q_n\}| = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Da questo si ricava anche che

$\tilde{E} = \{x \in [0,1],\ x \text{ irrazionale}\}$ è misurabile e

$|\tilde{E}| = 1$ dato che $\tilde{E} = [0,1] \setminus \hat{E}$ (differenza di misurabili)

Dato che $\tilde{E} \cup \hat{E} = [0,1] \Rightarrow m(\tilde{E}) + \underbrace{m(\hat{E})}_{0} = m([0,1]) = 1$

i numeri irrazionali sono molti di più dei razionali !!

Def. Dico che $E \subset \mathbb{R}^N$ è trascurabile se $m^*(E) = 0$.

(7) Se E è trascurabile $\Rightarrow$ E è misurabile (e $m(E) = 0$)

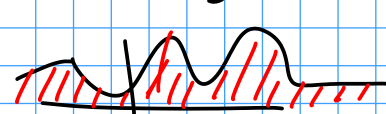
INTEGRALI

Sia $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$. Vogliamo definire (se possibile) l'integrale. BISOGNA ANDARE PER PASSI

(e comunque dovremo mettere qualche proprietà su f)

Def. (misurabilità per le funzioni)

(a) Se $f : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty]$ dico che è misurabile se l'insieme $\mathrm{epi}(f) = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^N\ 0 \le y \le f(x)\}$ è misurabile in $\mathbb{R}^{N+1}$



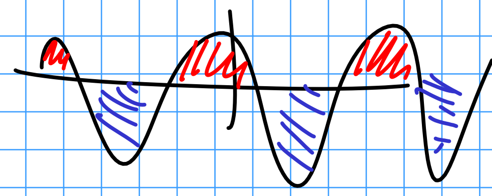
(b) Se $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$ dico che f è misurabile se f^+ e f^- sono misurabili. Ricordo che

$$0 \le f^+ = \max(f, 0) \qquad f^- = (-f)^+ = -(\min(f,0)) \ge 0$$

IN ALTRI TERMINI DEVONO ESSERE MISURABILI SEPARATAMENTE

$\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^N, 0 \le y \le f(x)\}$

$\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^N : f(x) \le y \le 0\}$



NOTA f è misurabile $\Rightarrow$ $|f|$ è misurabile

Due definizioni di integrale: $\boxed{\text{Sia } f : \mathbb{R}^N \to [\infty, +\infty] \text{ misurabile}}$

(a) Se $f \ge 0$ pongo

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = m_{\mathbb{R}^{N+1}}(\text{epi}(f)) \in [0, +\infty]$$

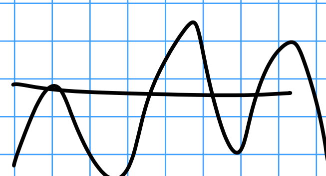
f misurabile, $f \ge 0$ $\to$ f ha sempre integrale, eventualmente $+\infty$

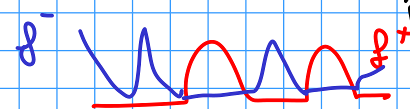
(b) Dico che f è integrabile se

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^+ < +\infty \qquad \int_{\mathbb{R}^N} f^- < +\infty$$

(questi integrali hanno senso per la parte (a))

$(f = f^+ - f^- \quad |f| = f^+ + f^-$





e in tal caso chiamo integrale di f su $\mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \qquad \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)\,dx$$

Se f è integrabile $\Rightarrow$ l'integrale di f è finito

CON QUESTE DEFINIZIONI f può avere integrale ma non essere integrabile

(nel caso di $f \geq 0$ misurabile)