Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 32 09/12/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Rivediamo la def.

Def. Vincolo regolare $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto

$V \subset A$ dico che è regolare, unilatero ($\le$ INVECE DI $=$) di codimensione 1, in A se esiste $G : A \to \mathbb{R}$, C^1 tale che

$$V = \{X \in A : G \le 0\}$$

(T) $\nabla G(x) \neq 0$ se $x \in V$ e $G(x) = 0$ (cioè $x \in \partial V$)

Vincolo ... regolare $\underline{\text{e-lato}}$ se $\exists\, G_1 \cdots G_k : A$, di classe C_1, t.c.

$$V = \{X \in A : G_1(x) \le 0 \cdots G_k(x) \le 0\} \quad \text{e}$$

(T) $\quad$ rango $\dfrac{\partial(G_{i_1} \cdots G_{i_r})}{\partial(X_1 \cdots X_N)}(x) = r$

per ogni $X \in V$ e $i_1 \cdots i_r \in \{1, \dots, k\}$ tali che

$$G_{i_1}(x) = \dots = G_{i_r}(x) = 0$$

(T) $\iff$ se $G_{i_1}(x) = \dots = G_{i_r}(x) = 0 \Rightarrow$
$\nabla G_{i_1}(x), \dots, \nabla G_{i_r}(x)$ sono lin. indip.

(T) è una "condizione di trasversalità": se chiamo

$V_1 = \{x \in A : G_1(x) \le 0\}$ .. $V_k = \{x \in A : G_k(x) \le 0\}$

allora ogni V_i è un vincolo regolare; inoltre

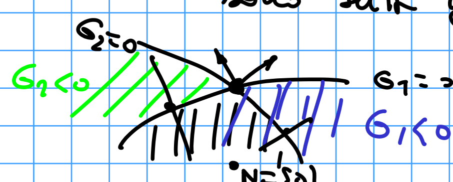
$$V = V_1 \cap \dots \cap V_k$$

la condiz. T dice che V_i e V_j si "intersecano bene" (nei punti di bordo)

IN GENERALE SE V è come detto sopra posso definire in ogni $x \in V$

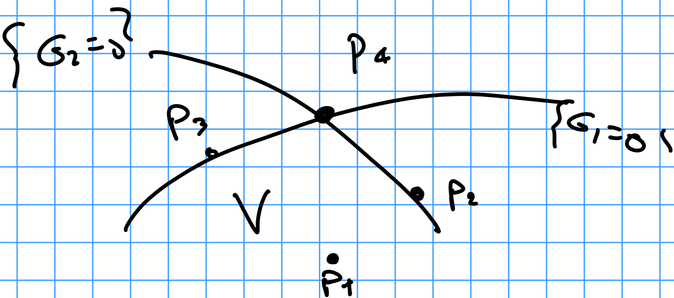
- lo spazio normale

$N_V(x) = \{\lambda_1 \nabla G_{i_1}(x) + \dots + \lambda_r \nabla G_{i_r}(x)$ dove $i_1 \dots i_r \in \{1, \dots, k\}$ sono tutti gli indici i tali che $G_i(x) = 0\}$



Conveniamo che se $G_i(x) < 0 \ \forall x \Rightarrow N_V(x) = \{0\}$
$T_V(x) = \mathbb{R}^N$

- lo spazio tangente $T_V(x) = N_V(x)^\perp$



$N_V(P_1) = \{0\}$ ha dim $= 0$

$N(P_2) = \cdot \ \cdot$ ha dim 1

$N(P_3)$ ha dim 1

$N(P_4)$ ha dim 2 $T(P_4) = \{0\}$

OSS. Se V è come sopra $r \leq N$ (non ci possono essere più di N funzioni che si annullano nello stesso pto)

Def. Se V è come sopra e $f: A \to \mathbb{R}$ è C^1 e se $x_0 \in V$ dico che x_0 è <u>critico</u> (stazionario) <u>VINCOLATO</u> per f su V se

$$\nabla f(x_0) \in N_V(x_0)$$

e cioè se:

se x_0 è tale che $\exists\, i_1 \ldots i_r \in \{1, \ldots, h\}$ con

$$G_{i_1}(x_0) = \cdots = G_{i_r}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad G_j(x_0) < 0 \text{ se } j \neq i_1 \ldots i_r$$

allora
$$(*)\ \begin{cases} \exists\, \lambda_1 \ldots \lambda_r \in \mathbb{R} \text{ tal. che} \\ \nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla G_{i_1}(x_0) + \cdots + \lambda_r \nabla G_{i_r}(x_0) \end{cases}$$

<u>Nota</u> . Se x_0 è tale che $G_1(x_0) < 0 \ldots G_h(x_0) < 0$ allora deve essere

$$\nabla f(x_0) = 0 \qquad \text{(pto critico (interno) LIBERO)}$$

Se c'è un solo indice i per cui $G_i(x_0) = 0$ (e $G_j(x_0) < 0$ per $j \neq i$) allora c'è un solo moltiplicatore:

$$\nabla f(x_0) = \lambda\, G_i(x_0)$$

(per esempio se $V = \{x \in A : G(x) \leq 0\}$) c'è un solo G

<u>Teorema (tipo Fermat)</u> Se f e V sono come sopra e se $x_0 \in V$ di max/min relativo per f su $V \Rightarrow$ x_0 è critico vincolato (cioè vale $(*)$)

<u>NON LO DIMOSTRIAMO</u> Vediamo come si usa

ESERCIZIO $V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, ax+by+cz \leq 1 \}$

dove $a>0, b>0, c>0$. Qui $A = \mathbb{R}^3$

Consideriamo inoltre $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

VORREI $\max_{P \in V} f(P) = ??$ $\min_{P \in V} f(P)$

(esistono perché V è chiuso (ok) ed è limitato:

$(x,y,z) \in V$ $x \geq 0$ $1 \geq ax+by+cz \geq ax$ $0 \leq x \leq \frac{1}{a}$

- stesso discorso per y e z)

• Vediamo se V è un vincolo regolare. V è determinato da $G_1(P) = -x$, $G_2(P) = -y$, $G_3(P) = -z$ ($P = (x,y,z)$) e $G_4(P) = x+y+z-1$

$V = \{ P \in \mathbb{R} : G_1(P) \leq 0, G_2(P) \leq 0, G_3(P) \leq 0, G_4(P) \leq 0 \}$

$\nabla G_1(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\nabla G_2(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\nabla G_3(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\nabla G_4(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

NOTO CHE UNA QUALUNQUE TERNA DI QUESTI è una base di $\mathbb{R}^3$.

Allora posso classificare i pti di V come segue

(1) P: $G_1(P) < 0$ $G_2(P) < 0$ $G_3(P) < 0$ $G_4(P) < 0$
(cioè i punti interni a V)

qui non devo verificare nulla

(2) P tali che solo uno $G_i(P) = 0$ $x=0 / y=0 / z=0 /$
$ax+by+cz=1$

qui devo verificare che il $\nabla G_i(P) \neq 0$ VERO

(3) ci sono due indici $i\ j$ con $G_i(P) = G_j(P) = 0$

qui devo verificare che $\nabla G_i(P)$ e $\nabla G_j(P)$ lin. ind.

VERO

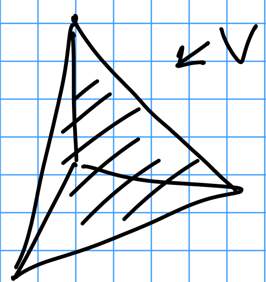
④ Ci sono tre indici $i\,j\,k$ con $G_i(P) = G_j(P) = G_k(P)$

devo verificare che $\nabla G_i(P), \nabla G_j(P), \nabla G_k(P)$ lin. indip

VERO

⑤ tutte le G_i si annullano in $P \Rightarrow$

$x=0 \quad y=0 \quad z=0 \quad ax+by+cz=1$ IMPOSSIBILE



Posso usare i moltiplicatori per trovare TUTTI i pti critici VINCOLATI su V.

① P INTERNO $\Rightarrow \nabla f(P) = 0 \iff \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff x=0 \quad y=0 \quad z=0$ ← NON TORNA, 0 NON È INTERNO

② UNA SOLA EGUAGLIANZA, UN SOLO MOLTIPLICATORE

quella così:

$$(2a) \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x=0 \quad y>0 \quad z>0 \quad ax+by+cz<1 \end{cases} \iff$$

$y=0 \quad z=0$ IMPOSSIBILE

NON ci sono PTI CRITICI DI f sulla "faccia"

$\{ P \in V : x=0 \; y>0 \; z>0 \}$

(2b)(2c) $y=0 \; / \; z=0$ NON TROVO NULLA

$$(2d)\ \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ x>0,\ y>0,\ z>0,\ ax+by+cz=1 \end{cases}$$

Moltiplico per x la I° rigo, per y la II° rigo, per z la terza e sommo

$$2x^2 = \lambda a x$$
$$2y^2 = \lambda b y$$
$$2z^2 = \lambda c z$$
$$\underbrace{2(x^2+y^2+z^2)}_{\lambda} = \lambda\,(\underbrace{ax+by+cz}_{=1}) = \lambda$$

Ho trovato λ! TORNO AL SISTEMA

$$\begin{cases} x = a(x^2+y^2+z^2) \\ y = b(x^2+y^2+z^2) \\ z = c(x^2+y^2+z^2) \end{cases}$$

Moltiplico I° per a / II° per b / III° per c e sommo

$$1 = ax+by+cz = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{a^2+b^2+c^2} \\ y &= \frac{b}{a^2+b^2+c^2} \\ z &= \frac{c}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}\right\}$$

UN PTO CRITICO

su questo punto f vale $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$

(3) (due eguaglianze)

$$\begin{cases} \begin{matrix} 2x = \\ 2y = \\ 2z = \end{matrix}\ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ x=0,\ y=0,\ z>0,\ \underbrace{ax+by}_{=0}+cz<1 \end{cases}$$

$\Rightarrow z=0 \Rightarrow ax+by+cz=0$ IMPOSSIBILE

Nello stesso modo considero $x=0,\ y>0,\ z=0,\ \ldots<1$

$x>0,\ y=z=0\ \ldots<1$

(NON TROVO NIENTE

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ x = 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad \cancel{a x} + by + cz = 1 \end{cases}$$

Dalla I° riga $\lambda = a\mu$ (poco interessante)

$$\begin{cases} \lambda = a\mu \\ 2y = \mu b \\ 2z = \mu c \\ x = 0 \quad y > 0 \quad z > 0 \quad by + cz = 1 \end{cases}$$

$\times y$, $\times z$ e sommo $\Rightarrow 2y^2 + 2z^2 = \mu$

Poi moltiplico la I° per b / la II° per c e sommo $\Rightarrow$

$$2 = 2by + 2cz = \mu(b^2 + c^2) \; \left(= 2(y^2 + z^2)(b^2 + c^2) \right)$$

$$\mu = \frac{2}{b^2 + c^2}$$

$$y = \frac{b}{b^2 + c} \qquad z = \frac{c}{b^2 + c^2} \Rightarrow f(0, y, z) = \frac{1}{b^2 + c^2}$$

$$\left(0, \frac{b}{b^2 + c^2}, \frac{c}{b^2 + c^2}\right)$$

Nello stesso modo trovo:

$$\left(\frac{a}{a^2 + c^2}, 0, \frac{c}{a^2 + c^2}\right) \longrightarrow f \text{ vale } \frac{1}{a^2 + c^2}$$

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2}, 0\right) \longrightarrow f \text{ vale } \frac{1}{a^2 + b^2}$$

TRE PTI CRITICI CON 2 MOLTIPLICATORI

④ TRE EGUAGLIANZE. TUTTI I PUNTI CHE TROVO SONO SICURAMENTE CRITICI VINCOLATI:

$$\underbrace{\nabla f(P) = \lambda \nabla G_i(P) + \mu \nabla G_j(P) + \nu \nabla G_k(P)}_{\text{sempre vero perché a destra posso generare } \mathbb{R}^3 \text{ al variare di } \lambda, \mu, \nu}$$

QUALI PUNTI TROVO? $(0, 0, 0)$ $(0, 0, 1/c)$ $(0, 1/b, 0)$ $(1/a, 0, 0)$

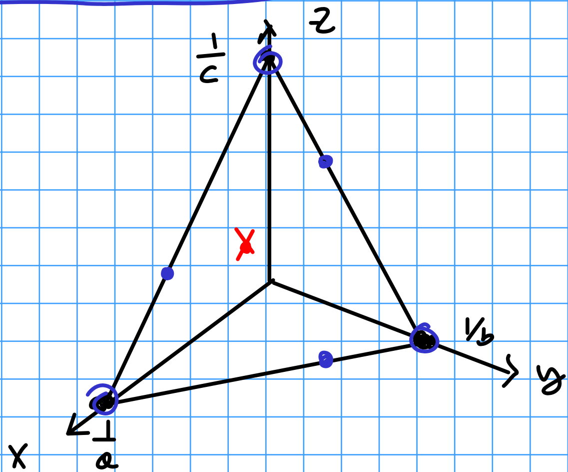
su cui f vale $0 \;/\; \frac{1}{c^2} \;/\; \frac{1}{b^2} \;/\; \frac{1}{e^2}$

$> \frac{1}{a^2+b^2}, \frac{1}{a^2+c^2}, \frac{1}{b^2+c^2}, \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

IN DEFINITIVA

$$\max_{P \in V} \|P\|^2 = \max\left(\frac{1}{c^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2}\right)$$

$$\min_{P \in V} \|P\|^2 = 0$$



DEFINIZIONE GENERALE $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto

$V \subset A$ tale che:

Esistono $G_1 \dots G_h, H_1 \dots H_k : A \to \mathbb{R}$, C^1, tali che

$$V = \{x \in : \underbrace{G_1(x) \le 0 \dots G_h(x) \le 0}_{h \text{ disuguaglianze}}, \underbrace{H_1(x) = \dots = H_k(x) = 0}_{k \text{ eguaglianze}}\}$$

(T) Se $i_1 \dots i_r \in \{1, \dots, h\}$ e x è tale che

$G_{i_1}(x) = \dots = G_{i_r}(x) = H_1(x) = \dots = H_k(x) = 0$

$\Rightarrow$ rango $\frac{\partial (G_{i_1} \dots G_{i_r} H_1 \dots H_k)}{\partial (x_1 \dots x_N)}$ è $r + K$

$\Leftrightarrow$ $\nabla G_{i_1}(x), \dots, \nabla G_{i_r}(x), \nabla H_1(x), \dots, \nabla H_k(x)$

sono tutti linearmente indipendenti

$(T) \Rightarrow \quad N \geq r+K$

IN QUESTO CASO POSSO CHIAMARE V "VINCOLO UNILATERO REGOLARE (A TRATTI) di CODIMENSIONE $K+1$

a cio' solo una S LO TOLGO

Se V è fatto così, per ogni suo punto x introduco

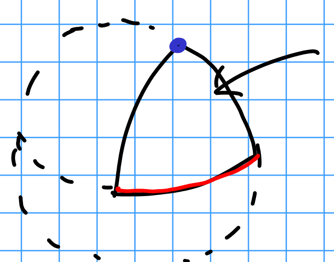
$$N_V(x) = \{\lambda_1 \nabla G_{i_1}(x) + \dots + \lambda_r \nabla G_{i_r}(x) + \mu_1 \nabla H_1(x) + \dots + \mu_K \nabla H_K(x)\}$$

dove $i_1 \dots i_r \in \{1 \dots h\}$ sono tutti gli indici i per cui $G_i(x) = 0$

$$T_V(x) = N_V(x)^\perp$$

$N_V(x)$ = spazio generato dai ∇H_j ($\forall j$) ∇G_i per gli i con $G_i(x)=0$

Per esempio $\quad V = \{x^2+y^2+z^2 = 1, \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0\}$



<u>V è regolare</u> perché in questo caso ho

$G_1(x,y,z) = -x \qquad G_2(-) = -y \qquad G_3(--) = -z$

$H(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$$\nabla G_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla H = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Supponiamo che $P = (x, y, z) \in V$.

① se $x>0, y>0, z>0$ devo verificare che $\nabla H(x,y,y) \neq 0$

VERO $\rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

② se $x=0 \quad y>0 \quad z>0 \quad y^2+z^2=1$ devo verificare che

$\nabla G_1(x,y,z)$ e $\nabla H(x,y,z)$ sono lin. indip.

cioè $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\2y\\2z\end{pmatrix}$ sono indip $\underline{\text{SÌ}}$ $(y>0, z>0)$

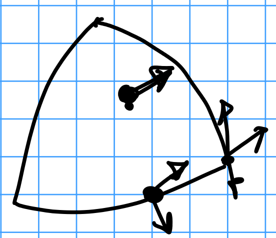
Stesso discorso se $x>0, y=0, z>0$ / $x>0, y>0, z=0$

(3) due G_i si annullano

$x=0 \quad y=0 \qquad z=1$ devo vedere se

$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sono indip. $\boxed{\text{SÌ}}$

(4) Non è possibile che tre eguaglianze siano vere contemporaneamente $\quad x=y=0 \quad x^2+y^2+z^2=1$



NELL' ESEMPIO : dato $P=(x,y,z)\in V$

- Se $x>0 \quad y>0 \quad z>0$
  $N_V(P)$ ha dim 1 $\quad (N_V(P)=\{\lambda P\})$
- Se una coordinata $=0 \Rightarrow$
  $N_V(P)$ ha dim 2
- Se due coordinate $=0$ (TRE "VERTICI")
  $N_V(P)$ ha dim 3.

Def. Diciamo che x_0 è stazionario vincolato per f su V

se $\nabla f(x_0)\in N_V(x_0)$

$$\nabla f(x_0)=\lambda_1\nabla G_{i_1}(x)+\dots+\lambda_r\nabla G_{i_r}(x)+\mu_1\nabla H_1(x)+\dots+\mu_k\nabla H_k(x)$$

come sopra.

TEOR. Se V è un vincolo (generale) in A aperto di $\mathbb{R}^n$, e se $f: A\to\mathbb{R}$ è C^1. Se x_0 è di max/min rel. per f su $V \Rightarrow x_0$ è stazionario vincolato per f su V

ESEMPIO Cerco max / min

$f = x - 2z$ su $V = \{ x^2+y^2+z^2=1,\ x\geq 0\ \ y\geq 0\ \ z\geq 0$

Noto che $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Devo fare vari casi

- Nessuna $G_i = 0$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\ x>0 \quad y>0 \quad z>0 \quad x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow y=0 \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

- UNA $G_i = 0$ per es. $x=0$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x=0 \quad y>0 \quad z>0 \quad x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow y=0 \quad \text{IMPOSS.}$$

STESSO DISCORSO se $z=0$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x>0 \quad y=0 \quad z>0 \quad x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

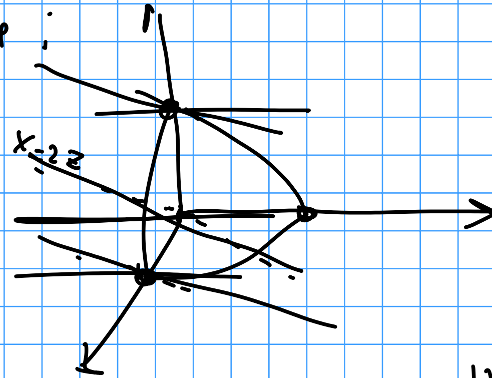
$$\begin{cases} y=0 \quad x>0 \quad z>0 \quad x^2+z^2=1 \quad \mu=0 \\ \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2\lambda} = x \\ -\frac{1}{\lambda} = z \end{array}\right\} \Rightarrow z=-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4x^2=1 \qquad 5x^2=1 \qquad x=+\frac{1}{\sqrt{5}} \\ z=-2x \end{cases}$$

TROVO $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \quad 0 \quad -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ NON VA BENE

③ RIMANGONO I VERTICI $(1,0,0)\ (0,1,0)$

e $(0,0,1)$ su cui f vale:



$f(1,0,0)=1 \leftarrow$ MAX

$f(0,1,0)=0$

$f(0,0,1)=-2 \leftarrow$ MIN

$$f(x,y,z)=\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)$$

$\{f(P)=c\}$ è un piano parallelo a

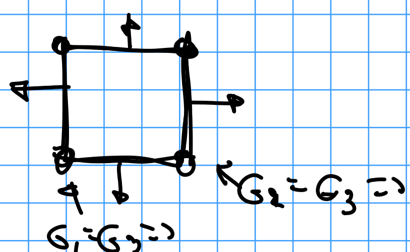
$x-2z=0$

$$Q=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}=\{P:\ G_i(P)\le 0\ \forall i=1\dots 4\}$$

quelle funzioni G_i di vincolo

$G_1(x,y)=-x \qquad G_2(x,y)=x-1$

$G_3(x,y)=-y \qquad G_4(x,y)=y-1$



Q è regolare:

- se $G_1(P)=0$ $\nabla G_1(P)\neq 0$
  - G_2
  - G_3
  - G_4

6 CASI

$\cancel{(1,2)}\ (1,3)\ (1,4)$

$\cancel{(2,3)}\ (2,4)\ (2,3)$

- $G_{i_1}(P)=G_{i_2}(P)=0$ $\quad \big(\underbrace{i_1\ \ i_2}_{i_1\dots i_r}\in\{1,\dots 4\}$

  $\nabla G_{i_1}(P)$ e $\nabla G_{i_2}(P)$ lin. ind.