Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 31 07/12/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Dalla volta scorsa

$$V = \{ (x,y,w,z) \in \mathbb{R}^4 : \overbrace{2xy + 3wz}^{G_1} = 1 ,\ \overbrace{3xz + 2yw}^{G_2} = -1 \}$$

$$P_0 = (1, -1, 1, 1)$$ $P_0 \notin V$

$G_1(P_0) = -2 + 3 = +1$ OK

$G_2(P_0) = 3 - 2 = +1$ NON TORNA

CAMBIO $V$ e metto 1 anche per $G_2$

$$V_1 = \{ (x,y,w,z) \in \mathbb{R}^4 : \overbrace{2xy + 3wz} = 1 ,\ \overbrace{3xz + 2yw} = 1 \}$$

I CONTI DELL'ALTRA VOLTA SUI DETERMINANTI TORNANO

TUTTI I MINORI HANNO DET. $\neq$ TRANNE

$$\det\left(\frac{\partial G}{\partial (y,z)}(P_0)\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

IL TEOR. MI DICE CHE POSSO RICAVARE UNA COPPIA
(VICINO A $P_0$)

DI VARIABILI IN TERMINI DELLE ALTRE DUE

ECCETTO $(y,z)$ IN TERMINI DI $(x,w)$ (IL TEOREMA NON LO DÀ)

VEDIAMO CHE EFFETTIVAMENTE QUESTO NON È POSSIBILE

VEDIAMO COME SONO LE $P=(x,y,w,z)$, $P\in V_1$

$x=1$ $w=1$ cioè $(1,y,1,z)$

$$(1,y,1,z)\in V_1 \iff$$

$$\underbrace{2y+3z=1, \; 3z+2y=1}_{\text{STESSA CONDIZIONE}}$$

TUTTA LA RETTA

$$\boxed{\left(1,y,1,\frac{1-2y}{3}\right)\in V_1 \quad y\in\mathbb{R}}$$

DUNQUE IN CORRISPONDENZA DI $x=1$ $w=0$

TROVO INFINITI $(y,z)$ con $(1,y,1,z)\in V_1$

( $P_0$ è uno di questi ) NON POSSO ESPRIMERE

$(y,z)$ come funzione di $(x,w)$

---

ESERCIZIO Considero $V\subset\mathbb{R}^2$ def. da

$$V=\{x^2+y^2+z^2=1, \; x+y-z=0\}$$

( $V$ = intersezione tra la sfera e un piano (per l'origine) )

$V$ è un vincolo regolare di codimensione 2 $\longrightarrow$ $\otimes$

VOGLIO $\underset{V}{\max}\, xyz$ $\underset{V}{\min}\, xyz$

SO CHE DEVONO ESISTERE PER WEIERSTRASS

APPLICO IL TEOR. GENERALE SUI MOLTIPLICATORI

QUI $f(x,y,z)=xyz$

$g_1(x,y,y)=x^2+y^2+z^2-1$, $g_2(x,y,z)=x+y-z$

PTO P.D.!

SO CHE IL MAX / MIN DEVE STAZIONARIO VINCOLATO su $V$

CIOÈ $\exists\, \lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tali che

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g_1(P) + \mu \nabla g_2(P) \iff$$

+ condizioni di vincolo $g_1(P) = 0$ $g_2(P) =$

$$\begin{cases} yz = \lambda 2x + \mu & \leftarrow \text{per } x \\ xz = \lambda 2y + \mu & \leftarrow \text{per } y \\ xy = \lambda 2z - \mu & \leftarrow \text{per } z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} xyz &= 2\lambda x^2 + \mu x \\ xyz &= 2\lambda y^2 + \mu y \\ xyz &= 2\lambda z^2 - \mu z \end{aligned}$$

sommo

$$3xyz = 2\lambda \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{=1} + \mu \underbrace{(x+y-z)}_{=0}$$

HO TROVATO CHE $2\lambda = 3xyz$

$$\begin{cases} 2\lambda = 3xyz \\ xz = 3xy^2z + \mu \\ xy = 3xyz^2 - \mu \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

sommo

$$\begin{cases} 2\lambda = 3xyz \\ \mu = 3xyz^2 - xy \\ xz + xy = 3xy^2z + 3xyz^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = x + y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & xz + xy - 3xy^2z - 3xyz^2 = 0 \\ & x(z + y - 3y^2z - 3yz^2) = 0 \\ & x(z + y - 3yz(y+z)) = 0 \\ & x(z+y)(1 - 3yz) = 0 \end{aligned}$$

HO TRE SISTEMI

(a) $\begin{cases} x = 0 \quad z = y \\ 2y^2 = 1 \end{cases} \iff \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{cases} z = -y, \quad x = -2y \\ 4y^2 + y^2 + y^2 = 1 \end{cases} \qquad \pm \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{cases} 3yz = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = x + y \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \frac{1}{3y}, \quad x = z - y = \frac{1}{3y} - y = \frac{1-3y^2}{3y} \\ \left(\frac{1-3y^2}{3y}\right)^2 + y^2 + \frac{1}{9y^2} = 1 \end{cases}$

$$\frac{1-6y^2+9y^4}{9y^2}+y^2+\frac{1}{9y^2}=1$$

$$1-6y^2+9y^4+9y^4+1=9y^2$$

$$18y^4-15y^2+2=0$$

$$y^2=\frac{15\pm\sqrt{5^2 3^2-16\cdot 9}}{36}=\frac{15\pm 3\sqrt{25-16}}{36}=\frac{15\pm 9}{36}=\begin{cases}\frac{24}{36}\\[4pt] \frac{6}{36}\end{cases}$$

$$y=\pm\frac{2}{\sqrt6} \qquad\qquad y=\pm\frac{1}{\sqrt6}$$

$$z=\frac{1}{3y}=\frac{1}{\pm\frac{6}{\sqrt6}}=\pm\frac{1}{\sqrt6} \qquad\qquad z=\frac{1}{3y}=\frac{1}{\pm\frac{3}{\sqrt6}}=\pm\frac{2}{\sqrt6}$$

$$x=z-y=\mp\frac{1}{\sqrt6} \qquad\qquad x=z-y=\pm\frac{1}{\sqrt6}$$

$$\pm\begin{pmatrix}-1/\sqrt6\\ \frac{2}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad\qquad \pm\begin{pmatrix}1/\sqrt6\\1/\sqrt6\\2/\sqrt6\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

8 PUNTI CRITICI VINCOLATI. CALCOLIAMOCI $f$ sopra

(a) $f\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt2},\pm\frac{1}{\sqrt2}\right)=0$

(b) $f(P)=\pm\frac{1}{6\sqrt6}\cdot 2=\pm\frac{1}{3\sqrt6}=\pm\frac{\sqrt6}{18}$

(c) anche in questo caso $f(P)=\pm\frac{\sqrt6}{18}$

$$\Rightarrow \quad \max_{V} xyz=\frac{\sqrt6}{18} \qquad \min_{V} xyz=-\frac{\sqrt6}{18}$$

⊗ VERIFICA DELLA REGOLARITÀ DI V

$$\nabla G_1(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

devo mostrare che sono lin. indip. (quando $(x,y,z) \in V$ !!)

$\iff \quad \dfrac{\partial(G_1,G_2)}{\partial(x\,y\,z)}(p)$ ha rango 2 per ogni $p \in V$

$$\frac{\partial(G_1,G_2)}{\partial(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- $\det \dfrac{\partial(G_1,G_2)}{\partial(x,y)} = \det\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2x-2y \quad (\neq 0 \text{ se } x \neq y)$
- $\det \dfrac{\partial(G_1,G_2)}{\partial(x,z)} = \det\begin{bmatrix} 2x & 2z \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -(2x+2z) \quad (\neq 0 \text{ se } x+z \neq 0)$
- $\det \dfrac{\partial(G_1,G_2)}{\partial(y,z)} = \begin{bmatrix} 2y & 2z \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2y-2z \quad (\neq 0 \text{ se } y+z=0)$

dico che non possono essere tutti nulli in V.
Se ci fosse $P=(x,y,z) \in V$ che annulla tutti i 3 determinanti

$\Rightarrow \quad x = y, \quad z = -x \quad z = -y \qquad P = (x,x,-x)$

Dato che $P \in V$ ho $x^2+x^2+x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

e ho anche $\underset{x+y-z}{x+x+x} = 0 \iff x = 0$ IMPOSSIBILE

V È REGOLARE (devo verificarlo per applicare i moltiplicatori)

---

$A \subset \mathbb{R}^n$ A aperto

VINCOLI UNILATERI sono dei vincoli dati da

$$V = \{ x \in A : G_1(x) \leq 0, \ldots, G_k(x) \leq 0 \}$$

$G_i \in C^1(A)$ + IPOTESI (VEDI SOTTO)

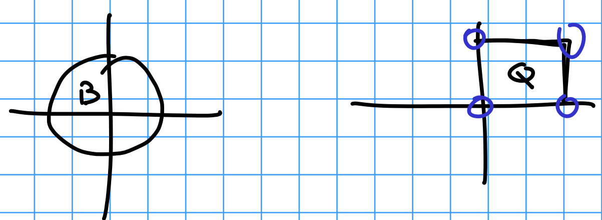
Questo V si dice VINCOLO UNILATERO DI CODIMENSIONE 1

Se $h = 1$ dico che V è REGOLARE

Se $h > 1$ dico che V è REGOLARE A TRATTI

ESEMPI . $B = \{x^2+y^2 \leq 1\}$ (unilatero, di codim 1, regolare)

$Q = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ (unilatero, di codim. 1, regolare a tratti)




(Q ha degli spigoli)

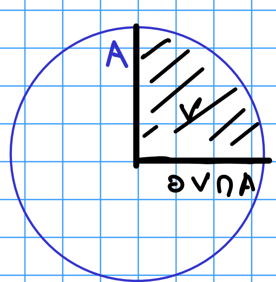
Se V è regolare a tratti di codimensione 1 POSSO DIRE CHE

- (V è chiuso in A). Se $A = \mathbb{R}$ V è chiuso
- $\mathring{V} = \{X \in A : G_1(x) < 0, \dots, G_i(x) < 0\}$

Per esempio $A = \{x^2+y^2+z^2 \quad 1\}$ (A è "l'ambiente")

$V = \{(x,y) \in A : x \geq 0 \quad y \geq 0\}$

In questo caso $G_1(x,y) = -x$ $\quad G_2(x,y) = -y$




← ESEMPIO (1)

IPOTESI: Se $P \in V$ e in P ho $\overbrace{i_1 \dots i_r}^{r \text{ indici}} \in \{1, \dots, h\}$

con

$$G_{i_1}(P) = G_{i_2}(P) = \dots = G_{i_r}(P) = 0$$

allora deve essere $\dfrac{\partial (G_{i_1} \dots G_{i_r})}{\partial (x_1 \dots x_N)}$ ha rango $r$

(in particolare $r \leq N$ altrimenti non è possibile)

<u>OSS.</u> IN PARTICOLARE DALL'IPOTESI SI RICAVA CHE

$$\nabla G_{i_1}(P) \neq 0 \ \dots \ \nabla G_{i_r}(P) \neq 0 \qquad \forall P \text{ in cui}$$
$$G_{i_1}(P) = \dots = G_{i_r}(P) = 0$$

L'IPOTESI EQUIVALE A DIRE CHE

$\nabla G_{i_1}(P) \dots \nabla G_{i_r}(P)$ sono linearmente indipendenti

(se $G_{i_1}(P) = \dots = G_{i_r}(P) = 0$)

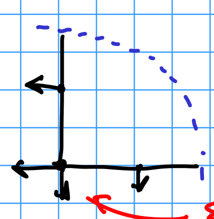
<u>OSS.</u> Se in $P$ c'è un solo $G_i$ che fa zero

$\Rightarrow$ in quel punto l'ipotesi chiede SOLO $\nabla G_i(P) \neq 0$

VEDIAMO CHE L'IPOTESI È VERIFICATA NELL'ESEMPIO (1):

$$V = \{ (x,y) : \underbrace{x^2+y^2<1}_{(x,y)\in A} \ ; \ x \geq 0 \quad y \geq 0 \}$$
$$G_1(x,y) = -x \qquad G_1(x,y) = -y$$

- SE $P \in A = \{x^2+y^2<1\}$ e $G_1(P) = 0$, $G_2(P) < 0$
  mi serve che $\nabla G_1(P) \neq 0 \iff \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ TORNA
- SE $P \in A = \{x^2+y^2<1\}$ e $G_1(P) \neq 0$, $G_2(P) = 0$
  mi serve che $\nabla G_2(P) \neq 0 \iff \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ TORNA

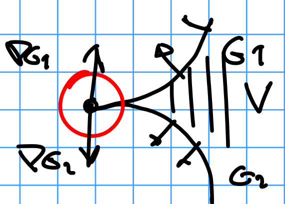


SONO LIN. INDIP.

• Se $P \in A$ $\quad G_1(P) = G_2(P) = 0 \quad \Rightarrow \quad P = (0,0)$

IN QUESTO CASO DEVO CONTROLLARE che $\frac{\partial G_1 G_2}{\partial (x,y)}(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sia di rango 2. QUESTO È VERO!

CASO CATTIVO (senza formule - solo disegno)




in $(0,0)$ $\quad \nabla G_1 = -\nabla G_2 \quad$ NON TORNA

V NON È REGOLARE

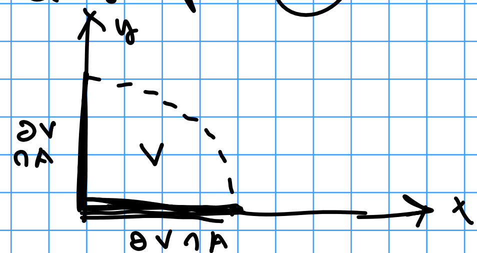
---

CHI È $\partial V$? se V è come sopra

$$V = \{ G_1(x) \le 0 \ \dots \ G_k(x) \le 0 \} \qquad (+ \text{ IPOTESI})$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \partial V \cap A &= \{ X \in A : G_1(x) = 0, \ G_2(x) \le 0 \ \dots \ G_k(X) \le 0 \} \\
&\cup \{ X \in A : G_1(x) \le 0, \ G_2(x) = 0, \ \dots \ G_k(x) \le 0 \} \\
&\ \vdots \\
&\cup \{ X \in A : G_1(x) \le 0, \ G_2(x) \le 0 \ \dots \ G_k(x) = 0 \} \\
&= \bigcup_{i=1}^{k} \{ X \in A : G_j(x) \le 0 \ \ j = 1 \dots k, \ G_i(x) = 0 \}
\end{aligned}$$

Nell'esempio (1) $\quad \partial V \cap A = \{ (x,y) : x^2 + y^2 < 1, \ x = 0, \ y \ge 0 \} \cup$
$\{ (x,y) : x^2 + y^2 < 1 \ \ x \ge 0 \ \ y = 0 \}$




POSSO SPEZZARE $\partial V \cap A$ in due pezzi

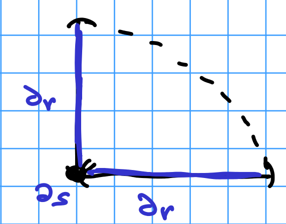
$$\partial_{r,A} V = \bigcup_{i=1}^{k} \{ x : G_i(x) = 0 \quad G_j(x) < 0 \ \text{se} \ j \ne i \} \quad \left( \text{frontiera regolare} \right)$$

$$\partial_{s,A} V = \partial V \cap A \setminus \partial_{r,A} V$$

Nell'esempio (1)

$$\partial_{r,A} V = \{ (x,0) \quad 0 < x < 1 \} \cup \{ (0,y) \quad 0 < y < 1 \}$$

$$\partial_{s,A} V = \{ (0,0) \}$$




- Nei punti di $\partial_{r,A} V$ si definisce la retta normale:

Se $P \in \partial_{r,A} V \Rightarrow$ so che esiste $i$ tra $1$ e $h$ tale che $G_i(P) = 0$ e $G_j(P) < 0 \quad \forall j \neq i$

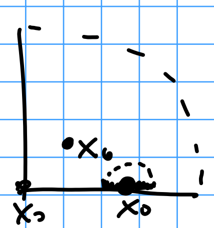
$\Rightarrow$ PONGO $\quad N_V(P) = \{ \lambda \nabla G_i(P) \}$

DUNQUE NEI PUNTI $P \in \partial_{r,A}$ "esiste lo spazio normale" di dimensione 1!

- Analogamente $T_V(P) = N_V(P)^{\perp}$ se $p \in \partial_{r,A}(V)$

<u>TEOREMA</u> Supponiamo $V$ sia come sopra. $f : A \to \mathbb{R}$ sia di classe $C^1$

Supponiamo che $x_0 \in V$ sia pto di max/min locale per $f$ su $V$. Allora:




- Se $G_i(x_0) < 0 \quad \forall i = 1 .. h$ deve essere

$$\nabla f(x_0) = 0$$

(in questo caso $x_0$ è interno a $V \Rightarrow$ uso Fermat - VERSIONE LIBERA)

- Se $\exists i$ con $G_i(x_0) = 0$ e $G_j(x_0) < 0 \ \forall j \neq i$ ($x_0 \in \partial_{r,A} V$). In questo caso $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla G_i(x_0)$$

(perché in particolare $x_0$ è di max/min locale su $\{x \in A : G_i(x) = 0\}$ $\Rightarrow$ applico i moltiplicatori di $\mathcal{L}$)

- IN GENERALE se ho un sottoinsieme $i_1 \dots i_r \in \{1 \dots k\}$ tale che

$$G_{i_1}(x_0) = \dots = G_{i_r}(x_0) = 0$$
$$G_j(x_0) < 0 \quad \text{se } j \neq i_1 \dots i_r$$

$\Rightarrow \exists \ \lambda_1 \dots \lambda_r \in \mathbb{R}$ tali che

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla G_{i_1}(x_0) + \dots + \lambda_r \nabla G_{i_r}(x_0)$$

---

Nell'esempio (1) se cerco i punti di V di max/min locale per una f DEVO GUARDARE (i punti $(x,y)$ con $x^2+y^2<1$):

(1) i punti $(x,y)$ con $x>0$ $y>0$ e $\nabla f(x,y) = 0$

(2.a) i punti $(x,y)$ con $x>0$ $y=0$ e

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla G_2(x,y) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2.a) i punti $(x,y)$ con $x=0$ $y>0$ e

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla G_1(x,y) = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) i punti $(x,y)$ con $x=0$ $y=0$ e

$(*)\quad \nabla f(x,y) = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

questo terzo caso mi dà solo $(0,0)$. NOTA CHE ALLORA LA CONDIZIONE è sempre vera perché in $\mathbb{R}^2$ ogni vettore è $\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dato che $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono lin. indip.