Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 30 02/12/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Teorema delle funzioni implicite (CASO GENERALE)

$N \geq 1 \quad M \geq 1$ (Nella versione base $M=1$)

$A \subset \mathbb{R}^{N+M}$ A aperto

CONVENZIONE i pti di $\mathbb{R}^{N+M}$ li scrivo (x,y) con $x \in \mathbb{R}^N$ $y \in \mathbb{R}^M$

$G : A \to \mathbb{R}^M$ di classe C^1. $\left(G = (G_1 \dots G_M) \atop G_j(x,y) \right)$

$P_0 = (x_0, y_0)$ tale che

$$\boxed{G(P_0) = G(x_0, y_0) = 0_M} \qquad 0_M = (\underbrace{0, \dots, 0}_{M}) \in \mathbb{R}^M$$

Noto che $J_G(x_0,y_0) = \Bigg[\underbrace{\frac{\partial G_j}{\partial x_i}}_{N} \quad \underbrace{\frac{\partial G_j}{\partial y_k}}_{M} \Bigg] \Big\} M$ $\quad j = 1 \dots M$, $i = 1 \dots N$, $k = 1 \dots M$

è $M \times (N+M)$

CONVENZIONE INDICO $\dfrac{\partial G}{\partial x} = \left[\dfrac{\partial G_j}{\partial x_i} \right]$ è $M \times N$

$\dfrac{\partial G}{\partial y} = \left[\dfrac{\partial G_j}{\partial y_k} \right]$ è $\boxed{M \times M}$

IPOTESI $\boxed{\det \dfrac{\partial G}{\partial y}(P_0) \neq 0}$ $\left(\dfrac{\partial G}{\partial y} \text{ INVERTIBILE} \right)$

TESI ESISTE $r_0 > 0$ tale che $B(P_0, r_0) \subset A$

ESISTE W aperto in $\mathbb{R}^N$ con $x_0 \in W$

ESISTE $g : W \to \mathbb{R}^M$ di classe $C^1(W)$ TALI CHE

$$\{(x,y) \in \underline{B(P_0, r_0)} \text{ tali che } G(x,y) = 0\} =$$

$$\{(x,y) : x \in W \quad y = g(x)\}$$

In altri termini $\{G(P) = 0\} \cap B(P_0, r_0)$ (sono vicino a $P_0 = (x_0, y_0)$)

è grafico di una $g : W \to \mathbb{R}^M$

W intorno di x_0

OSS. Se G è lineare (da $\mathbb{R}^{N+M} \to \mathbb{R}^M$)

(allora $G(P) = M \cdot P$ dove $M = [M_1, M_2]$ è una matrice) e se M_2 è invertibile $\Rightarrow$

$$\{G(P) = 0\} = \{M(x,y) = 0\} = \{M_1 x + M_2 y = 0\} =$$

$$\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^N \quad y = -M_2^{-1} M_1 x\}$$

DIM. USO IL TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE

INTRODUCO LA FUNZIONE $\Phi : A \ (\subset \mathbb{R}^{N+M}) \to \mathbb{R}^{N+M}$

$$\boxed{\Phi(x,y) := (\underset{\mathbb{R}^N}{x}, \underset{\mathbb{R}^M}{G(x,y)})}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial(x,y)} = \right) J_\Phi(x,y) = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{array}\right] & \begin{matrix} \}N \\ \}M \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\quad}_{N} & \underbrace{\quad}_{M} \end{matrix} & \end{array} = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \det J_\Phi = \det \frac{\partial G}{\partial y} \neq 0 \quad \text{in } P_0 \quad (\text{per ipotesi})$$

Possiamo applicare il teorema di inversione locale in P_0

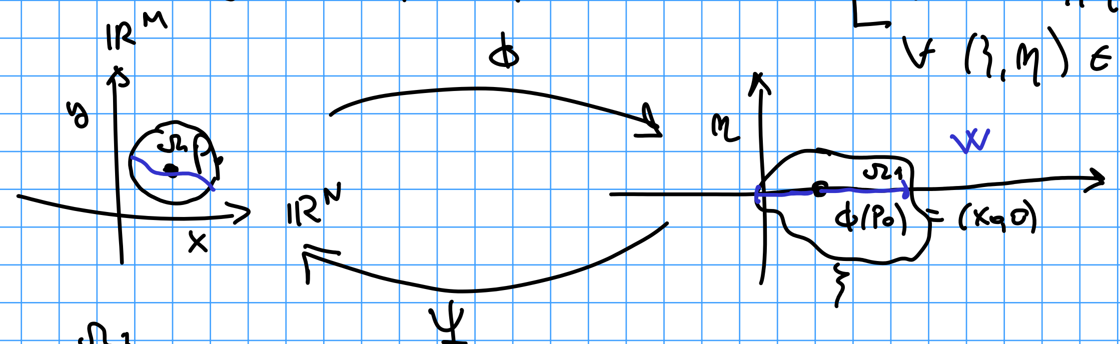
$\exists\, r_0 > 0$ tale che $\Omega := B(P_0, r_0) \subset A$ e

- $\Omega_1 := \Phi(\Omega)$ è aperto
- Φ è iniettivo su Ω
- $\Psi := \Phi^{-1} : \Omega_1 \to \Omega$ è C^1 e

$$J_\Psi(Q) = J_\Phi(\Psi(Q))^{-1} \quad \forall Q \in \Omega_1$$

$$\left(J_\Psi(\Phi(P)) = J_\Phi(P)^{-1} \quad \forall P \in \Omega \right)$$

- Posso scrivere $\Psi(\xi, \eta) = (\underset{\mathbb{R}^N}{\Psi_1(\xi,\eta)}, \underset{\mathbb{R}^M}{\Psi_2(\xi,\eta)})$
  con $\Psi_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^N$ $\quad \Psi_2 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^M$
- Per def di $\Psi = \Phi^{-1}$ so che $\left[\Phi(\Psi(\xi,\eta)) = (\xi, \eta) \right]$
  $\forall (\xi, \eta) \in \Omega_1$



$$\underset{\Omega_1}{(\xi, \eta)} = \Phi(\Psi(\xi,\eta)) = \Phi(\Psi_1(\xi,\eta), \Psi_2(\xi,\eta)) =$$
$$(\Psi_1(\xi,\eta), G(\Psi_1(\xi,\eta), \Psi_2(\xi,\eta)))$$
$$\Updownarrow$$
$$\xi = \Psi_1(\xi,\eta), \qquad \eta = G(\xi, \Psi_2(\xi,\eta))$$
$$\forall (\xi, \eta) \in \Omega_1$$

Definisco $W = \{ \xi \in \mathbb{R}^N : (\xi, 0) \in \Omega_1 \}$. W è aperto in $\mathbb{R}^N$ perché lo vedo come $\varphi^{-1}(\Omega_1)$ dove $\varphi(\xi) = (\xi, 0)$. φ è continua e Ω_1 è aperto.

Inoltre $x_0 \in W$ perché $(x_0, 0) \in \Omega$ essendo $(x_0, 0) = \Phi(x_0, y_0)$

Definisco infine $g(\xi) = \psi_2(\xi, 0) \quad \forall \xi \in W$

· Allora

$$(x,y) \in \Omega \text{ e } G(x,y)=0 \iff \begin{array}{l}\phi(x,y) \in \Omega_1 \\ \phi_1(x,y) = x \text{ e } \phi_2(x,y)=0\end{array}$$

$$\iff (x,0) \in \Omega_1 \text{ e } \psi(x,0) = (x,y)$$

$$\iff x \in W \text{ e } \underbrace{\psi_2(x,0)}_{g(x)} = y$$

cioè $(x,y) \in \Omega$ e $G(x,y)=0$

$$\Updownarrow$$

$x \in W$ e $y = g(x)$ $\boxed{\text{TESI}}$ #

<u>DEF.</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto e sia $V \subset A$, $K < N$.

Dico che V è un vincolo regolare (bilatero) di CODIMENSIONE K (o di dimensione $N-K$)

se esiste $G : A \to \mathbb{R}^K$ tale che

· $V = \{ x \in A : G(x) = 0 \}$

(★) · $\forall x \in V$ $\quad \underset{K \times N}{J_G(x)}$ ha rango K (ho un minore $K \times K$ con determinante $\neq 0$)

IN ALTRI TERMINI, SE $G = (G_1 \dots G_K)$ $\quad G_i : A \to \mathbb{R}$

(★) $\iff$ $\nabla G_1(x), \dots, \nabla G_K(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI (in particolare $\nabla G_i(x) \neq \vec{0}_N$)

<u>OSS.</u> Posso vedere V come intersezione di $V_1 \dots V_K$ dove

$V_i = \{ x \in A : G_i(x) = 0 \}$ ← vincolo di codimensione 1

<u>DEFINISCO</u> allora $\forall x \in V$

$$N_V(x) = \{ \lambda_1 \nabla G_1(x) + \dots + \lambda_K \nabla G_K(x), \ \lambda_1 \dots \lambda_K \in \mathbb{R} \}$$

(spazio di dim K)

$T_V(x) = N_V(x)^{\perp}$ (spazio di dim $N-K$)

Si può verificare che $T_V(x) = \mathrm{Ker}\, J_G(x)$

$\Leftrightarrow$ $\vec{v} \in T_V(x) \Leftrightarrow J_G(x)\vec{v} = 0$

PAUSA FINO ALLE 18.25

OSS. Le definizioni di $T_V(x)$ e $N_V(x)$ non dipendono dalla funzione G usata per definirli (si fa come nel caso base.)

CONV. La G come sopra si dice "funzione DEFINENTE V"

TEOREMA Supponiamo che $V \subset A$ A aperto, $A \subset \mathbb{R}^N$ sia regolare di codimensione $k < N$. Sia G una funzione definente per V.

Supponiamo che $f : A \to \mathbb{R}$ e che $x_0 \in V$ sia di massimo / minimo relativo per $f|_V$ $\Leftrightarrow$

$\exists\, r>0 :$ $\quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in V \ \ \|x-x_0\| < r$

$(f(x) \geq f(x_0))$

ALLORA $\exists\, \lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla G_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla G_k(x_0)$$

Questi λ_i si chiamano "moltiplicatori di Lagrange"

Un pto $x_0 \in V$ per cui vale la relazione sopra si dice pto stazionario (critico) vincolato a V

NON LO DIMOSTRIAMO (si fa come nel caso $k=1$ usando la versione generale del Teorema del Dini)

ESEMPIO $V = \{(x,y,w,z) \in \mathbb{R}^4 : 2xy + 3wz = 1,\ 3xz + 2yw = -1\}$

Mi chiedo se V è un vincolo regolare di codimensione 2
(di dimensione $4-2=2$)

La funzione definente è $G(x,y,w,z) = \left(2xy+3wz-1 \,,\, 3xz+2yw+1\right)$

$G: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ $\quad (A = \mathbb{R}^4)$ $\quad$ è di classe C^1

$$J_G(x,y,w,z) = \begin{bmatrix} 2y & 2x & 3z & 3w \\ 3z & 2w & 2y & 3x \end{bmatrix}$$

$G: A \to \mathbb{R}^M$, $A \subseteq \mathbb{R}^N$

NOTAZIONE $\quad \dfrac{\partial(G_{j_1}, G_{j_2} \cdots G_{j_k})}{\partial(x_{i_1}\, x_{i_2} \cdots x_{i_R})} = \left[\dfrac{\partial G_{j_r}}{\partial x_{i_s}}\right]$ $\quad j_1 \cdots j_k \in \{1 \cdots M\}$, $\quad i_1 \cdots i_R \in \{1 \dots N\}$

Faccio tutti i minori 2×2 di $J_G(x,y,w,z) = \dfrac{\partial(G_1,G_2)}{\partial(x,y,w,z)}$

$$\frac{\partial G}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 3z & 2w \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 4yw - 6xz$$

$$\frac{\partial G}{\partial(x,w)} = \begin{bmatrix} 2y & 3z \\ 3z & 2y \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 4y^2 - 9z^2$$

$$\frac{\partial G}{\partial(x,z)} = \begin{bmatrix} 2y & 3w \\ 3z & 3x \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 6xy - 9wz$$

$$\frac{\partial G}{\partial(y,w)} = \begin{bmatrix} 2x & 3z \\ 2w & 2y \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 4xy - 6wz$$

$$\frac{\partial G}{\partial(y,z)} = \begin{bmatrix} 2x & 3w \\ 2w & 3x \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 6x^2 - 6w^2$$

$$\frac{\partial G}{\partial(w,z)} = \begin{bmatrix} 3z & 3w \\ 2y & 3x \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 9xz - 6yw$$

- V è regolare se in ogni $P=(x,y,w,z) \in V$ c'è uno di questi determinanti $\neq 0$
- Vediamo se è possibile che siano tutti 0

Se questo è vero $\Rightarrow$

$$\underbrace{3z = \pm 2y \qquad w = \pm x}$$ 4 casi $++/+-/-+/--$

INSERISCO queste condizioni in G:

$$G\left(x, y, \pm x, \pm \tfrac{2}{3} y\right) =$$

$++$ $\begin{pmatrix} 2xy + 2xy - 1 \\ 2xy + 2xy + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4xy - 1 \\ 4xy + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ IMPOSSIBILE

$+-$ $\begin{pmatrix} 2xy - 2xy - 1 \\ \sim\sim\sim \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sim \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ IMPOSSIBILE

$-+$ $\begin{pmatrix} 2xy - 2xy - 1 \\ \sim\sim\sim \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \text{---} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ IMPOSSIBILE

$--$ $\begin{pmatrix} 2xy + 2xy - 1 \\ -2xy - 2xy + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4xy - 1 \\ -4xy + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{4xy = 1 \qquad 3z = -2y \qquad w = -x}$$

$6xy - 9wz = 0 \iff 6xy - 6xy = 0$ COMPATIBILE

$4yw - 6xz \longrightarrow -4xy + 4xy = 0$ OK

$4y^2 - 9z^2$ $\otimes$

$6xy - 9wz \longrightarrow 6xy - 6xy = 0$ OK

$4xy - 6wz \longrightarrow 4xy - 4xy = 0$ OK

$6x^2 - 6w^2$ $\otimes$

$9xz - 6yw \longrightarrow -6xy + 6xy = 0$ ok

I PUNTI (x, y, z, w) con $4xy = 1$, $z = -\frac{2}{3}y$, $w = -x$

<u>NON VANNO BENE</u> V NON E' REGOLARE IN $\mathbb{R}^4$

Però se prendo $A = \mathbb{R}^4 \setminus \{(x, y, w, z) : 4xy = 1,\ 3z + 2y = 0,\ x + w = 0\}$

questo è un aperto e V è regolare in A

(verificare che $P_0 \in V$)

PRENDIAMO $P_0 = (1, -1, 1, 1)$ P_0 è un punto "buono"

COSA CI DICE il teorema delle funz. implicite.

① $\dfrac{\partial G}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 3z & 2w \end{bmatrix}$ in P_0 $\rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ det $= -10 \neq 0$

② $\dfrac{\partial G}{\partial(x,w)} = \begin{bmatrix} 2y & 3z \\ 3z & 2y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ det $= -2 \neq 0$

$\dfrac{\partial G}{\partial(x,z)} = \begin{bmatrix} 2y & 3w \\ 3z & 3x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ det $= -15 \neq 0$

$\dfrac{\partial G}{\partial(y,w)} = \begin{bmatrix} 2x & 3z \\ 2w & 2y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ det $= -10 \neq 0$

⑤ $\dfrac{\partial G}{\partial(y,z)} = \begin{bmatrix} 2x & 3w \\ 2w & 3x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ det $= 0$

⑥ $\dfrac{\partial G}{\partial(w,z)} = \begin{bmatrix} 3z & 3w \\ 2y & 3x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ det $= 15 \neq 0$

Dal Dini ottengo che vicino a P_0 posso descrivere V come grafico di $(w(x,y), z(x,y)) = f(x,y)$

(VERSIONE COME SCRITTA SOPRA)

MA se "permuto le variabili" OGNUNO DEI DETERMINANTI $\neq 0$ mi dà una possibile rappresentazione di V come grafico.

- Per esempio il caso ① dice che, vicino a P_0, posso descrivere V come grafico di una $(x(w,z), y(w,z))$
- Il caso ② $\Rightarrow$ V è grafico di una $(x(y,z), w(y,z))$

IL DINI NON FUNZIONA NEL CASO ⑤

non so se si può descrivere V come grafico di una $(y(x,w), z(x,w))$

IN EFFETTI SI PUÒ VEDERE CHE VICINO A P_0 V NON È UN GRAFICO $(x,w) \rightarrow (y,z)$ (TROVO PIÙ coppie (y,z) con gli stessi (x,w))