Claudio Saccon (*)

Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 29 01/12/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ESERCIZIO Trovare max / min della funzione

$$f(x,y,z) := x - 2y + 2z$$

sul vincolo $V = \{x^2+y^2+z^2 = 9\} = \{g(x,y,z) = 0\}$ dove $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-9$

Si applica il Teorema dei moltiplicatori con $A = \mathbb{R}^3$.

MAX / MIN <u>DEVONO</u> esistere dato che V è chiuso e limitato (WEIERSTRASS). Cerco i pti critici VINCOLATI su V

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 2 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 9 \end{cases} \implies$$

$$\begin{array}{l} 2\,\mathrm{I}^\circ + \mathrm{II}^\circ \\ 2\,\mathrm{I} - \mathrm{III}^a \\ \mathrm{II}^\circ + \mathrm{III}^\circ \end{array} \quad \begin{cases} 0 = 4\lambda x + 2\lambda y \\ 0 = 4\lambda x - 2\lambda z \\ 0 = 2\lambda y + 2\lambda z \end{cases}$$

NON VA D'ACCORDO CON IV°

sistema $\lambda x y z$ HA SOLO LA SOL. NULLA a meno che

$$\det \begin{bmatrix} 4\lambda & 2\lambda & 0 \\ 4\lambda & 0 & -2\lambda \\ 0 & 2\lambda & 2\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff 0 = 4\lambda \det \begin{bmatrix} 0 & -2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda \end{bmatrix} - 2\lambda \det \begin{bmatrix} 4\lambda & -2\lambda \\ 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

$$4\lambda\, 4\lambda^2 - 2\lambda\, 8\lambda^2 = 0$$

$$\cancel{4\cdot 2\cdot 2\lambda^3 \det\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix} = 16\lambda^3\left(0+0+0-(-1+1+0)\right)=0}$$

~~sempre zero — $\forall\lambda$ il sistema ha sol. non nulle~~

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 2 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$$

moltiplico I° per x / II° per y, III° per z e sommo

$$(f(x,y,z))\quad x-2y+2z = 2\lambda(x^2+y^2+z^2) = 2\lambda\cdot 9 = 18\lambda$$

$$2\lambda = \frac{x-2y+2z}{9}$$

metto 2λ nel sistema

$$\begin{cases} 9 = (x-2y+2z)x \\ -18 = (x-2y+2z)y \\ 18 = (x-2y+2z)z \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases} \Longrightarrow \quad \frac{9}{x} = -\frac{18}{y} \qquad \frac{9}{x} = \frac{18}{z} \quad \Leftrightarrow \quad 9y = -18x \qquad 9z = 18x$$

$$\boxed{y = -2x \qquad z = 2x}$$

nella IV° riga

$$x^2+4x^2+4x^2 = 9 \qquad x^2 = 1 \qquad x = \pm 1 \qquad y = \mp 2 \qquad z = \pm 2$$

DUE PTI CRITICI VINCOLATI $\pm(1,-2,2)$

$$f(1,-2,2) = 1+4+4 = 9$$

$$f(-1,2,-2) = \quad = -9$$

$$\boxed{\max_V f = 9 \qquad \min_V f = -9}$$

CON GLI STESSI INGREDIENTI

$V = \{ g(x,y,z) = 1 \}$ $\quad \max_V g \quad \min_V g$ (SE ESISTONO)

NOTA V non è limitato: V è un "piano affine"

$$V = \{x - 2y + 2z = 1\} = \{(x-1) - 2y + 2z = 0\}$$

VEDO CHE $(1,0,0) \in V$ e che $V = (1,0,0) + V'$

dove $V' = \{x - 2y + z = 0\} = \{P \in \mathbb{R}^3 : P \cdot \vec{w} = 0\}$

dove $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

V = piano passante per P di "direzione" $\vec{w}$

PERÒ V è chiuso.

Dato che $g(P) = \|P\|^2 - 9 \Rightarrow$ tende a $+\infty$ x $\|P\| \to \infty$

$\boxed{g \text{ ha minimo su } V}$

g non ha massimo su V $\left(\sup_V g = +\infty\right)$

Cerco $\min_V g$. Cerco i pti stazionari VINCOLATI su V

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 1 = \lambda \\ 2y = \lambda \cdot (-2) \quad -2\lambda \\ 2z = \lambda \cdot 2 \quad 2\lambda \\ x - 2y + 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{array}{ll} 2\,\mathrm{I}^\circ + \mathrm{II}^\circ & 4x + 2y = 0 \quad \boxed{y = -2x} \\ \mathrm{II}^\circ + \mathrm{III}^\circ & 2y + 2z = 0 \quad \boxed{z = -y} \end{array}$$

$$\begin{cases} \lambda = 2x \\ y = -2x, \; z = 2x \\ x + 4x + 4x = 1 \end{cases} \qquad x = \frac{1}{9} \quad y = -\frac{2}{9} \quad z = \frac{2}{9}$$

UN SOLO PTO CRITICO VINCOLATO $\left(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$

$$\Rightarrow g = \frac{1}{81} + \frac{4}{81} + \frac{4}{81} = \frac{1}{9} = \min_V (x^2 + y^2 + z^2)$$

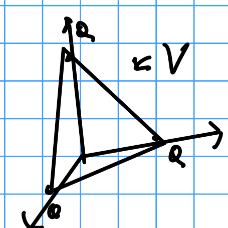
IN ENTRAMBI I CASI STO CERCANDO I PUNTI IN CUI "LE SUPERFICI DI LIVELLO" DI f e g sono tangenti

- Le superfici di livello di f sono dei piani $(x-2y+2z=k)$
- Le superfici di livello di g sono sfere $(x^2+y^2+z^2=h)$

PROBLEMA Sia $a>0$. Voglio scrivere a come somma di tre addendi >0 in modo che il loro prodotto sia massimo.

FORMALIZZAZIONE. Dati x, y, z con $x>0, y>0, z>0$ tali che $x+y+z=a$ cerco il max di xyz

$\Longleftrightarrow$ $V = \{x+y+z=a, \ x>0, y>0, z>0\}$ mi chiedo se $\exists \max\limits_{(x,y,z)\in V} xyz$



OSSERVO CHE . V è limitato

infatti se $(x,y,z)\in V \Rightarrow 0\le x\le a, \ 0\le y\le a, \ 0\le z\le a$

$\left(\Rightarrow \ \|(x,y,z)\| \le \sqrt{a^2+a^2+a^2} = \sqrt{3}\,a \right)$

MA V non è chiuso

NON POSSO ANCORA DIRE CHE $\exists \max\limits_{V} xyz$ / $\min\limits_{V} xyz$

Conviene considerare V_1 def. da

$$V_1 = \{x+y+z=a, \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$$

V_1 è limitato (come prima) V_1 è chiuso $V\subset V_1$

$V_1 \setminus V$ = punti di V_1 con una (o più) coordinate nulle

(si può vedere che $V_1 = \overline{V}$, ma non ci serve)

Allora $\exists \max_{V_1} xyz \ (\geq 0)$ $\exists \min_{V_1} xyz \ (\geq 0)$ (perché $xyz \geq 0$ in V_1)

- Dato che, per esempio $(0,0,a) \in V_1 \Rightarrow 0 \cdot 0 \cdot a = 0 \Rightarrow \boxed{\min_{V_1} xyz = 0}$

- $\max_{V_1} xyz = \max_{V} xyz$

In fatti $\boxed{\max_{V_1} xyz > 0}$ in quanto ci sono dei punti in $V \subset V_1$

con $xyz > 0$ per esempio $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$

Dato che in $V_1 \setminus V$ il prodotto xyz vale zero

(perché almeno uno tra x, y e z è zero)

$\Rightarrow$ il punto di $\max_{V_1} xyz$ è un terno (x,y,z) che sta in V $\Rightarrow \max_{V_1} xyz = \max_{V} xyz$

CERCO DUNQUE I PTI CRITICI VINCOLATI PER xyz su $\underline{\underline{V}}$. Se $f(x,y,z) = xyz$

$\nabla f = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ $\qquad g(xyz) = x+y+z-a$

$$\begin{cases} yz = \lambda \\ xz = \lambda \\ xy = \lambda \\ x+y+z = a \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = xy \\ yz = xz = xy \\ x+y+z = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz = xz \\ xz = xy \\ x+y+z = a \end{cases}$$ VARI CASI

$z = 0 \rightsquigarrow xyz = 0$ MINIMO SU...

$x = 0$, $z = 0 \longrightarrow$ DA ESCLUDERE

$$\begin{cases} y = x \\ z = y \\ x+y+z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = y = z \\ x+y+z = a \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \max_{V\ (V_1)} xyz = \frac{a^3}{27}$$

#