Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 28 30/11/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

__Teorema del Dini__ (VERSIONE DI BASE)

A aperto di $\mathbb{R}^N$ $G: A \to \mathbb{R}$ G di classe C^1.

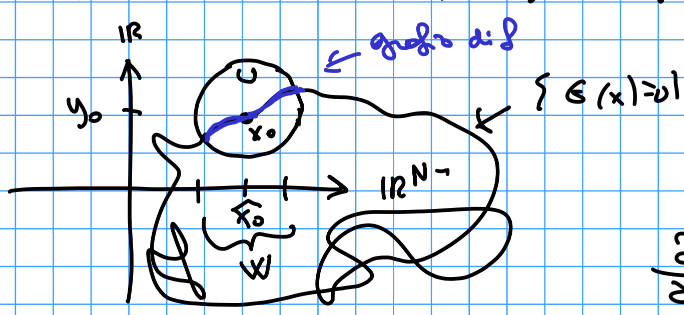
[USIAMO QUESTA CONVENZIONE: $x \in \mathbb{R}$ si scrive $(\hat{x}, y)$
dove $\hat{x} = (x_1 \dots x_{N-1})$ e $y = x_N$ $\hat{x} \in \mathbb{R}^{N-1}$ $y \in \mathbb{R}$]

Supponiamo che $x_0 \in A$ sia tale che $\left(x_0 = (\hat{x}_0, y_0) \right)$

$$G(x_0) = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial y}(x_0) \neq 0$$

Allora esiste $U \subset A$, intorno di x_0 (U è un aperto $x_0 \in U$)
ed esistono W aperto in $\mathbb{R}^{N-1}$ $\hat{x}_0 \in W$, $f: W \to \mathbb{R}$
f di classe $C^1(W)$ tali che

$$\{ x \in U : G(x) = 0 \} = \{ (\hat{x}, f(\hat{x})) : \hat{x} \in W \}$$



$$\left(f(\hat{x}_0) = y_0 \right)$$

INOLTRE VALE LA FORMULA

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} = \cdot = \frac{\partial G(x)}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial G(x)}{\partial y}$$

Si può prendere $y = x_i$ per $i = 1 \dots N$ (INVECE DI $y = x_N$)

e in quel caso ci vuole l'ipotesi $\frac{\partial G}{\partial x_i}(x_0) \neq 0$ $\hat{x} = (x_1 \dots \hat{X} \dots x_N)$ i-esimo, $y = x_i$

e la tesi si deve scrivere in modo conseguente

#

Def. A aperto $V \subset A$. Dico che V è UN VINCOLO REGOLARE (BILATERO, DI CODIMENSIONE 1) se esiste $G : A \to \mathbb{R}$ tale che: G è $C^1(A)$

- $V = \{x \in A : G(x) = 0\}$
- $\boxed{\forall x \in V \text{ si ha } \nabla G(x) \neq 0}$

Se V è come sopra, definisco anche, $\forall x \in V$

$$N_V(x) = \{\lambda \nabla G(x) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$ retta normale a V in x

$$T_V(x) = N_V(x)^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^N : v \cdot \nabla G(x) = 0\}$$ spazio tangente a V in x

N_V e T_V sono due sottospazi complementari di $\mathbb{R}^N$ $\dim N_V = 1$, $\dim T_V = N-1$

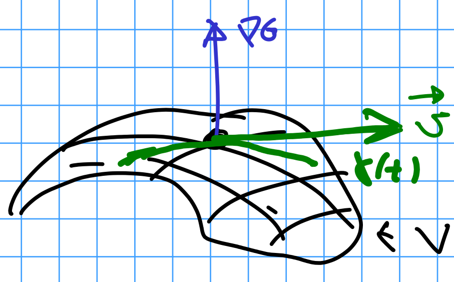
Se G è come sopra dico che G è UNA FUNZIONE DEFINENTE per V.

A rigore devo dimostrare che $N_V(x)$ e $T_V(x)$ non dipendono da G ma solo da V. — LO VEDIAMO TRA UN MOMENTO

PROP. Sia $G : A \to \mathbb{R}$ di classe C_1, $V = \{x : G(x) = 0\}$ e supponiamo $\nabla G(x) \neq \vec{0}$ $\forall x \in V$. Sia $x_0 \in V$. Allora

$\vec{v} \in T_V(x_0) \iff$ Esiste una curva $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V$ $(\varepsilon > 0)$ di classe $C^1(]-,\varepsilon[)$ tale che:

$\gamma(0) = x_0$ $\gamma'(0) = \vec{v}$



$\leftarrow V = \{G(x) = 0\}$

Dim. $\Leftarrow$ se γ è come sopra so che $G(\gamma(t))=0$ ($\gamma(t)\in V$!!) . Ne segue $\frac{d}{dt}G(\gamma(t))=0 \iff$

$$\nabla G(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=0 \qquad \forall t\in]-\varepsilon,\varepsilon[\qquad \text{METTO } t=0$$

$$\nabla G(\underbrace{\gamma(0)}_{x_0})\cdot\underbrace{\gamma'(0)}_{\vec{v}}=0 \qquad \text{DUNQUE } \vec{v}\perp\nabla G(x_0) \iff$$

$\vec{v}$ è tangente

$\Rightarrow$ Sia $\vec{v}\in T_V(x_0) \iff \vec{v}\cdot\nabla G(x_0)=0$

PER SEMPLICITÀ SUPPONGO $\frac{\partial G}{\partial x_N}(x_0)\neq 0$ (nello stesso modo se $\frac{\partial G}{\partial x_i}(x_0)\neq 0$)

SCRIVIAMO $x_0=(\hat{x}_0, y_0)$ $\quad \hat{x}_0\in\mathbb{R}^{N-1}$ $\quad y_0 = x_{0,N}\in\mathbb{R}$

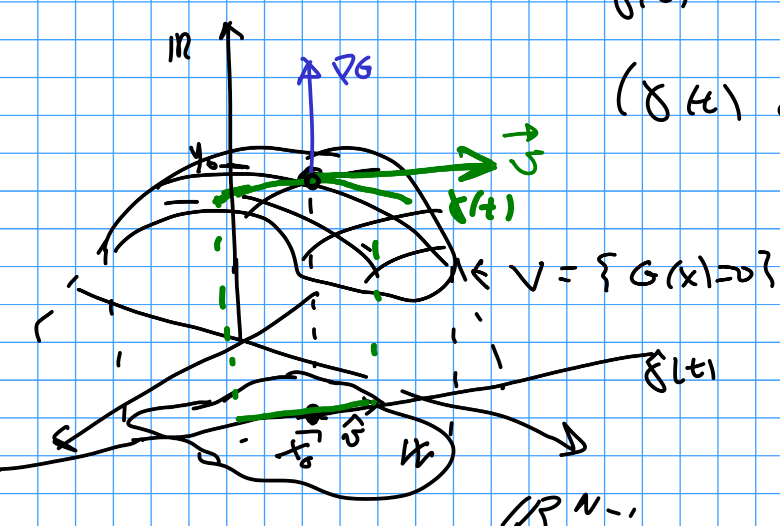
$\vec{v}=(\hat{v}, v_N)$

Per il Dini so che esiste U intorno di x_0, W intorno di $\hat{x}_0$ e $g: W\to\mathbb{R}$ tali che

$$V\cap U=\{(\hat{x}, g(\hat{x})),\ \hat{x}\in W\}$$

Definisco $\hat{\gamma}(t)=\hat{x}_0+t\hat{v}$ (da $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N-1}$)

$\gamma(0)=\hat{x}_0 \qquad \gamma'(0)=\hat{v}$



($\gamma(t)$ è una retta)

se mi restringo su $]-\varepsilon,\varepsilon[$ $\varepsilon>0$ piccolo $\gamma(t)\in W$

DEFINISCO

$$\gamma(t)=(\hat{\gamma}(t), g(\hat{\gamma}(t)))$$

per come è definita g $\Rightarrow$ $\gamma(t)$ sta su V !!

Calcolo $\gamma'(0) = \left(\hat{\gamma}'(0), \underbrace{\frac{d}{dt} g(\hat{\gamma}(t))\Big|_{t=0}}_{??} \right)$ with $\hat{\gamma}'(0) = \hat{v}$

$\hat{\gamma}'(0) = \hat{v}$

$$\frac{d}{dt} g(\hat{\gamma}(t))\Big|_{t=0} = \nabla g(\hat{\gamma}(t)) \cdot \hat{\gamma}'(t)\Big|_{t=0} = \nabla g(\hat{x}_0) \cdot \hat{v} =$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}(\hat{x}_0) \cdot \underset{\hat{v}_i}{v_i} \underset{(\text{DINI!})}{=} \underbrace{- \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\frac{\partial G}{\partial x_i}(x_0)}{\frac{\partial G}{\partial x_N}(x_0)} \cdot v_i}_{\circledast} = v_N$$

RICORDIAMOCI CHE $\vec{v} \perp \nabla G(x_0) \iff$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial G(x_0)}{\partial x_i} v_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial G(x_0)}{\partial x_i} v_i + \underbrace{\frac{\partial G(x_0)}{\partial x_N}}_{\neq 0} v_N = 0$$

$$\iff v_N = - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\frac{\partial G}{\partial x_i}(x_0)}{\frac{\partial G(x_0)}{\partial x_N}} v_i \quad \circledast$$

METTO QUESTA INFORMAZIONE NEL CALCOLO SOPRA $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} g(\hat{\gamma}(t))\Big|_{t=0} = v_N$$

e quindi

$$\gamma'(0) = (\hat{v}, v_N) = \vec{v} \quad !!$$

$\underline{\text{OSS.}}$ $N_V(x_0)$ e $T_V(x_0)$ NON DIPENDONO DALLA FUNZIONE DEFINENTE G.

$\underline{\text{Dim.}}$ Supponiamo che $G_1, G_2 : A \to \mathbb{R}$ sono C^1 e tali che

$$V = \{ x \in A : G_1(x) = 0 \} = \{ x \in A : G_2(x) = 0 \}$$

e $\nabla G_1(x) \neq \vec{0}$, $\nabla G_2(x) \neq \vec{0}$ $\forall x \in V$.

$\underline{\text{DIMOSTRO CHE}}$ $\circledast$ $\nabla G_1(x)$ e $\nabla G_2(x)$ sono sulla stessa retta $\iff$
$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \neq 0)$ t.c. $\nabla G_1(x) = \lambda \nabla G_2(x)$ (e viceversa)

(questo poi mi dà $T_V(x)$ (e $N_V(x)$) è lo stesso con G_1 e con G_2)

⊗ Rendo $\vec{v}$ perpendicolare a $\nabla G_1(x)$ $\Leftrightarrow$

$\vec{v}$ tangente a V in x ("SECONDO G_1")

per la proposizione precedente $\exists\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V$, $\gamma \in C^1$, con $\gamma(0) = x$ $\gamma'(0) = \vec{v}$

Dato che $V = \{ G_2(x) = 0 \}$ $\Rightarrow$ $G_2(\gamma(t)) = 0$ $\forall t$

$\Rightarrow$ $\nabla G_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$, in particolare, a $t=0$,

$\nabla G_2(x_0) \cdot \vec{v}$

DUNQUE HO TROVATO :

$$\vec{v} \cdot \nabla G_1(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \nabla G_2(x) = 0$$

Scambiando G_1 e G_2 trovo:

$$\boxed{\vec{v} \cdot \nabla G_1(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \nabla G_2(x) = 0}$$

questo mi dà $\nabla G_1(x) = \lambda \nabla G_2(x)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

da cui la tesi #

ABBIAMO USATO IL SEGUENTE FATTO ($\simeq$ ALGEBRA LIN.)

TEOREMA Se $X \subset \mathbb{R}^N$ è uno spazio lineare $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^N$ è somma diretta di X e $X^\perp$

PAUSA $\longrightarrow$ 16.12

DIM. (a) $X \cap X^\perp = \{0\}$ in effetti se $v \in X \cap X^\perp$ $\Rightarrow$ $\|v\|^2 = v \cdot v = 0$ $\Rightarrow$ $v = 0$ per le proprietà del prodotto scalare.

(b) Devo far vedere che, se $v \in \mathbb{R}^N$ esistono $v_1 \in X$ $v_2 \in X^\perp$ t.c. $v = v_1 + v_2$

DATO v considero $g(x) = \|v - x\|^2$ g è CONTINUA

$\boxed{\lim_{\|x\| \to \infty} g(x) = +\infty}$ in fatti

$$g(x) = \|v\|^2 - 2\, v \cdot x + \|x\|^2 \geq \|v\|^2 - 2\|v\|\,\|x\| + \|x\|^2$$

(Schwarz)

e questa funzione di $\|x\|$ diverge se $\|x\|$ diverge

Restringo g a $\mathbb{X}$. Per W. generalizzato

g ha minimo su $\mathbb{X}$. Chiamo $\underbrace{\pi(v) \in \mathbb{X}}$ "un" PUNTO DI MINIMO:

$$\underbrace{\|v - \pi(v)\|^2 \leq \|v - x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{X}}$$

Siano $x \in \mathbb{X}$ e $t > 0$ e considero $\pi(v) + tx \in \mathbb{X}$

DUNQUE posso scrivere:

$$\cancel{\|v - \pi(v)\|^2} \leq \|v - \pi(v) + tx\|^2 \quad \forall t > 0$$

$$= \cancel{\|v - \pi(v)\|^2} + 2t(v - \pi(v)) \cdot x + t^2\|x\|^2$$

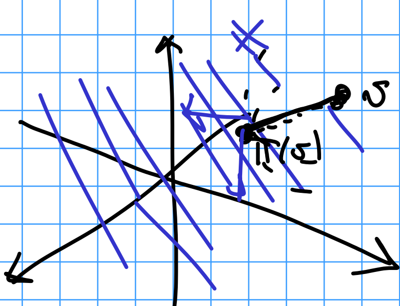
$$\Downarrow$$

$$-t^{\cancel{2}}\|x\|^2 \leq 2\cancel{t}(v - \pi(v)) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{X} \quad \forall t > 0$$

$$-t\|x\|^2 \leq 2(v - \pi(v)) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{X} \quad \forall t > 0$$

$\Rightarrow$ (faccio il limite per $t \to 0^+$) (e semplifico il 2)

$$0 \leq (v - \pi(v)) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{X}$$



PERÒ SE PRENDO $-x$ al posto di x

$$0 \leq (v - \pi(v)) \cdot (-x) \Rightarrow$$

$$0 \geq (v - \pi(v)) \cdot x \quad \text{e quindi}$$

$$\boxed{0 = (v - \pi(v)) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{X}}$$

Riassumendo: $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$ TROVO $\pi(\vec{v}) \in \mathbb{X}$ tale che

$\vec{v} - \pi(\vec{v}) \in \mathbb{X}^\perp$

DUNQUE $\vec{v} = \underbrace{\vec{v} - \pi(\vec{v})}_{\in \mathbb{X}^\perp} + \underbrace{\pi(\vec{v})}_{\in \mathbb{X}}$ $\boxed{\text{TESI}}$

CONSEGUENZA Se $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^N$ $\mathbb{X}$ sottospazio $\Rightarrow$

$$\boxed{(\mathbb{X}^\perp)^\perp = \mathbb{X}}$$

Dim. Sia $x \in (\mathbb{X}^\perp)^\perp$ Posso scrivere

$$x = x_1 + x_2 \qquad x_1 \in \mathbb{X} \qquad x_2 \in \mathbb{X}^\perp \qquad \text{ALLORA}$$

$$0 = \underset{\underset{(\mathbb{X}^\perp)^\perp}{\cap}}{x} \cdot \underset{\underset{\mathbb{X}^\perp}{\cap}}{x_2} = (x_1 + x_2) x_2 = x_2 \cdot x_2 = \|x_2\|^2$$

$\Rightarrow x_2 = 0$ e $x = x_1 \in \mathbb{X}$ (Ho DIM. CHE $(\mathbb{X}^\perp)^\perp \subset \mathbb{X}$)

VICEVERSA SE $x \in \mathbb{X}$ e $x_2 \in \mathbb{X}^\perp \Rightarrow x \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x \in (\mathbb{X}^\perp)^\perp$

PTI DI MASSIMO / MINIMO "VINCOLATI"

TEOREMA (dei MOLTIPLICATORI DI L. – VERSIONE BASE)

$A \subset \mathbb{R}^N$ aperto $f, G : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1;

$$V = \{x \in A : G(x) = 0\} \qquad (\text{i.e. "VINCOLO"})$$

IPOTESI $\forall x \in V \quad \nabla G(x) \neq \vec{0}$ (V è REGOLARE)

Sia $x_0 \in V$, $\rho > 0$ tali che

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in V \cap B(x_0, \rho)$$
$$(f(x) \leq f(x_0))$$

x_0 è di minimo locale (massimo locale) per f su V

ALLORA $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ (λ moltiplicatore di Lagrange) t.c.

$$(*) \qquad \nabla f(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$$

In altri termini $\nabla f(x_0)$ è NORMALE A V in x_0

(**Def.** Se esiste λ come sopra dico che x_0 è pto critico VINCOLATO per f su V.

Questa nozione include i vecchi punti critici ($\lambda = 0$))

Dim. Faccio vedere che $\nabla f(x_0)$ è perpendicolare a tutti i vettori $\vec{v} \in T_V(x_0) = N_V(x_0)^\perp$. Da questo seguirà $(*)$

(sto usando $(X^\perp)^\perp = X$ con $X = \{\lambda \nabla G(x_0)\}$)

Per questo prendo $\vec{v} \in T_V(x_0)$. A causa della Prop. sopra so che esiste una curva C^1 $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V$ tale che $\gamma(0) = x_0$ $\gamma'(0) = \vec{v}$.

Dato che $f|_V$ ha minimo locale in x_0 (max) $\Rightarrow$ $t \to \varphi(t) := f(\gamma(t))$

ha min locale (max loc.) in $t = 0$

Allora $\varphi'(0) = 0$ e cioè $\nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $\nabla f(x_0) \cdot \vec{v}$ che è quanto volevo dimostrare #

ESEMPIO $A = \mathbb{R}^2$ $G(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$V = \{x^2 + y^2 = 1\}$ (circonferenza unitaria)

V è regolare come già visto

$f(x,y) = xy$

NOTO CHE V è limitato e chiuso, f continua

SICURAMENTE f ha max/min (ASSOLUTI) su V

Per trovarli posso usare il Teorema sopra

$$\nabla G(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Devo trovare tutti i pti (x,y) tali che

$$\begin{cases} y = \lambda\, 2x \\ x = \lambda\, 2y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Moltiplico la I° eq. per x
" " la II° eq. per y

$$\left.\begin{cases} xy = 2\lambda x^2 \\ xy = 2\lambda y^2 \end{cases}\right\} \text{SOMMO} \Rightarrow 2xy = 2\lambda(x^2+y^2) = 2\lambda$$
$$x^2+y^2 = 1$$

DUNQUE $\boxed{\lambda = xy}$

RIMETTO $\lambda = xy$ NEL SISTEMA

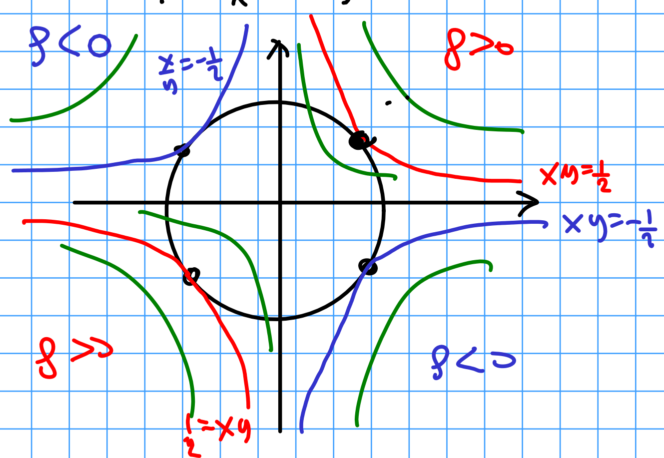
$$\begin{cases} y = 2x^2 y \\ x = 2xy^2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$y=0 \Rightarrow x=0$ IMPOSSIBILE
$x=0 \Rightarrow y=0$ IMPOSSIBILE

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 1 = 2x^2 \\ 1 = 2y^2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2 = 1/2 \\ y^2 = 1/2 \end{matrix}$$

cioè HO QUATTRO PUNTI $(x,y) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



$$f\Big(\overbrace{\pm\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\text{DUE PTI DI MAX}}\Big) = \frac{1}{2} \leftarrow (\text{VALORE}) \text{ MAX}$$

$$f\Big(\underbrace{\pm\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\text{DUE PTI DI MIN}}\Big) = -\frac{1}{2} \leftarrow (\text{VALORE}) \text{ MIN}$$

$$\left(\lambda = \frac{1}{2} \;/\; -\frac{1}{2}\right)$$

LE CURVE $\{f = c\}$ SONO TANGENTI A V
se c è un valore "estremale"