Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 27 25/11/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

AVVISO:

RICEVIMENTO PER CHIARIMENTI SUL COMPITINO
VENERDÌ ORE 15
(su TEAMS)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2y \end{bmatrix} \qquad \det = 4(y^2-x^2)$$

$(\neq 0 \text{ se } |x| \neq |y|)$

$\leftarrow \det J_f(P_0) \neq 0$

$$P_0 = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \longrightarrow Q_0 = f(P_0) = \left(2, \frac{5}{2}\right)$$

allora $\underbrace{f^{-1}(Q) \text{ esiste per } Q \simeq Q_0}$ e

$$J_{f^{-1}}(Q_0) = J_f(P_0)^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dunque se scrivo $f^{-1}(\xi,\eta) = \left(x(\xi,\eta),\, y(\xi,\eta)\right)$ allora

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\left(2,\tfrac{5}{2}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6} \qquad \frac{\partial x}{\partial \eta}\left(2,\tfrac{5}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

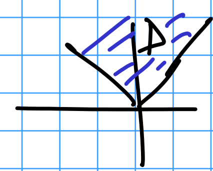
$$\frac{\partial y}{\partial \xi}\left(2,\tfrac{5}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \frac{\partial y}{\partial \eta}\left(2,\tfrac{5}{2}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

VEDIAMO DI ARRIVARCI CON UN CALCOLO ESPLICITO:

CALCOLO f^{-1} cioè dato (η,ξ) cerco le soluzioni di

$$(\text{SYS})\begin{cases} 2xy = \xi \\ x^2+y^2 = \eta \end{cases}$$

Ho visto che è necessario $\boxed{\eta \geq 0 \qquad |\xi| \leq \eta} \iff (\eta,\xi) \in D$



$y^2 = \eta - x^2 \iff y = \pm\sqrt{\eta - x^2}$ e metto nella prima riga

$$\pm 2x\sqrt{\eta - x^2} = \xi \iff 4x^2(\eta - x^2) = \xi^2 \iff 0 = 4x^4 - 4\eta x^2 + \xi^2$$

$$\iff x^2 = \frac{2\eta \pm \sqrt{4\eta^2 - 4\xi^2}}{4} = \frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2-\xi^2}}{2} \quad (\geq 0)$$

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2-\xi^2}}{2}}} \qquad \begin{pmatrix}\text{quattro } x \text{ possibili: a parte il caso con } \eta = |\xi| \Rightarrow \text{due sol. opposte} \\ \text{a parte } \eta = \xi = 0 \Rightarrow \text{sol } (0,0)\end{pmatrix}$$

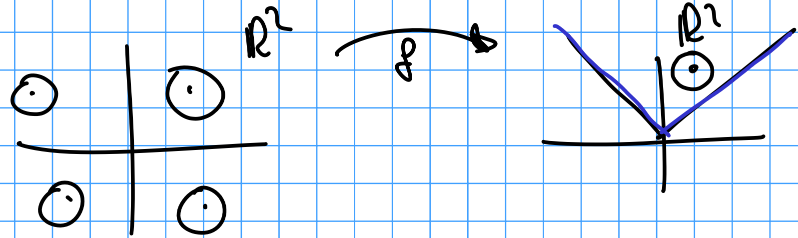
$\begin{pmatrix}\text{a parte} \\ x = 0\end{pmatrix}$ $y = \dfrac{\xi}{2x}$

$$(\text{se } \xi \neq 0) = \pm\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{2}{\eta \pm \sqrt{\eta^2-\xi^2}}} = \pm\frac{\xi}{2}\sqrt{2\,\frac{\eta \mp \sqrt{\eta^2-\xi^2}}{\cancel{\eta^2} - \cancel{\eta^2} + \xi^2}} = \pm\frac{\xi}{|\xi|}\sqrt{\frac{\eta \mp \sqrt{\eta^2-\xi^2}}{2}}$$

$$= \pm\, \text{sign}(\xi)\sqrt{\frac{\eta \mp \sqrt{\eta^2-\xi^2}}{2}}$$

SI CAPISCE CHE, se fisso un punto (ξ_0,η_0) IN D che non è nell'immagine delle diagonali $\iff \eta_0^2 \neq \xi_0^2$, allora

POSSO CONSIDERARE QUATTRO POSSIBILI INVERSE DEFINITE VICINO A $\eta_0\xi_0$



Se prendo $\xi_0 = 2$ $\quad \eta_0 = \frac{5}{2}$ (come all'inizio)

ci sono 4 punti (x,y) tali che $f(x,y) = (2, 5/2)$

e precisamente

$$x_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}\right)} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}\right)} = \pm \begin{cases} \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$x_0 = \sqrt{2}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}, \ -\sqrt{2}, \ -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \sqrt{2}, \ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ -\sqrt{2}$$

I 4 PUNTI SONO: $\pm\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ $\left(\text{NOTA } f(x,y) = f(y,x) = f(-x,-y)\right)$

SCELGO L'INVERSA che manda $\left(2, \frac{5}{2}\right) \to \left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$

(cioè prendo $+,+$):

$$f^{-1}(\xi,\eta) = \Bigg(\underbrace{\sqrt{\frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - \xi^2}}{2}}}_{x(\xi,\eta)}, \underbrace{\sqrt{\frac{\eta - \sqrt{\eta^2 - \xi^2}}{2}}}_{y(\xi,\eta)} \Bigg)$$

$$f^{-1}\underbrace{\left(2, \tfrac{5}{2}\right)}_{Q_0} = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P_0$$

Calcoliamo la Jacobiana di $f^{-1}(Q_0)$:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - \xi^2}}{2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{2\sqrt{\eta^2 - \xi^2}} \cdot (-\cancel{2}\xi) =$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - \xi^2}}{2}} \sqrt{\eta^2 - \xi^2}}$$

METTO $\xi = 2$ $\eta = \frac{5}{2}$

$$\sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \frac{-1}{4}\,\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)}\;\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3\sqrt{\frac{8}{4}}} = \frac{-1}{3\sqrt{2}}$$ TORNA

FACENDO LE ALTRE TRE DERIVATE SI PUO' VERIFICARE CHE LO Jacobiano e' quello previsto!

SOTTOINSIEMI DEFINITI IN MODO IMPLICITO

ESEMPIO

- $S = \{x^2+y^2=1\}$ ← MODO IMPLICITO DI DARE LA SFERA

Se usassi

- $S = \{\gamma(t) : t \in [0,2\pi]\}$ dove $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$

QUESTA SI CHIAMA "FORMA PARAMETRICA" ed è "esplicito"

FORMALIZZAZIONE

Considero una funzione $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e chiamo $V = \{X \in \mathbb{R}^N : G(X) = 0\}$

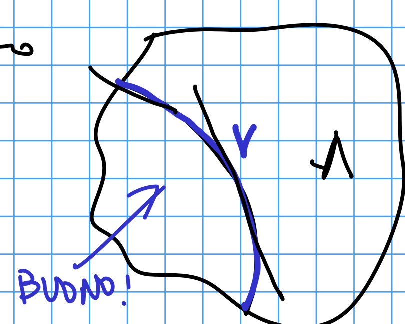
$\left(\begin{array}{l} G(x,y)=k \\ G(x,y)-k=0 \end{array}\right)$

(nell'esempio $N=2$, $G(x,y) = x^2+y^2-1$

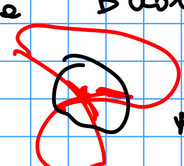
PIÙ IN GENERALE

$A \subset \mathbb{R}^N$ $G : A \to \mathbb{R}$ e considero

$V = \{X \in A : G(X) = 0\}$



MI CHIEDO QUANDO V è "buono"



← CATTIVO

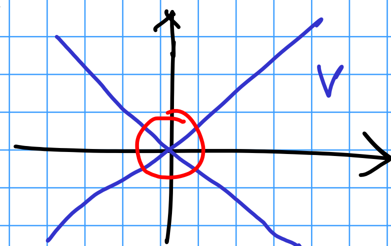
PRENDEREMO SEMPRE $\boxed{G \in C^1(A)}$

questa ipotesi NON ESCLUDE che V sia "cattivo"

Per esempio se prendo $G(x,y) = x^2 - y^2$ questo è C^1

Ma: $V = \{ x^2 - y^2 = 0 \} = \{ (x-y)(x+y) = 0 \} =$

$\{ x = y \} \cup \{ y = -x \}$



V è "spigoloso" in $(0,0)$ COSA RENDE $(0,0)$ diverso dagli altri punti di V ?!

RISPOSTA $(0,0)$ è pto critico di G

TEOREMA (Teorema del DINI - delle funzioni implicite - CASO BASE)

IPOTESI $\left[\begin{array}{llll} A \subset \mathbb{R}^N & A \text{ aperto} & G : A \to \mathbb{R} & \text{di classe } C^1(A) \\ x_0 \in A & \text{tale che} & G(x_0) = 0, & \nabla G(x_0) \neq \vec{0} \end{array} \right]$

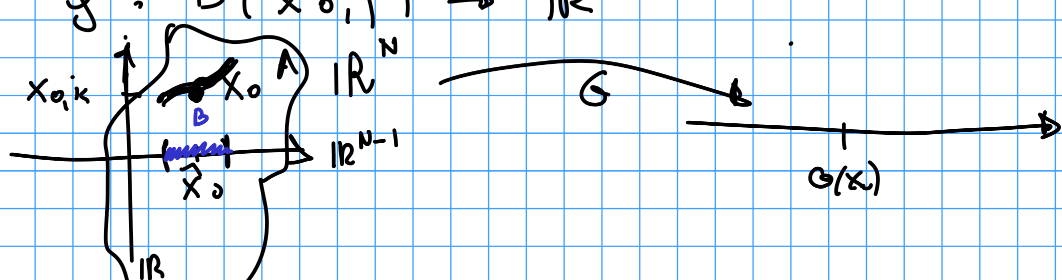
. Supponiamo che $\frac{\partial G}{\partial x_k}(x_0) \neq 0$

(c'è un tale k perché $\nabla G(x_0) \neq \vec{0}$) ; Poniamo, se $x \in \mathbb{R}^N$,

$\mathbb{R}^{N-1} \ni \hat{x} = (x_1 \dots x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N)$ . .

ALLORA esiste un $\rho > 0$ e una funzione

$f : \overbrace{B(\hat{x}_0, \rho)}^{B} \to \mathbb{R}$



tale che VICINO A x_0 V si descrive

$$\left\{ (\underbrace{x_1 \dots x_{k-1}}_{\hat{x}}, f(\hat{x}), \underbrace{x_{k+1} \dots x_N}_{\hat{x}}) \quad \hat{x} \in B(\hat{x}, \rho) \right\}$$

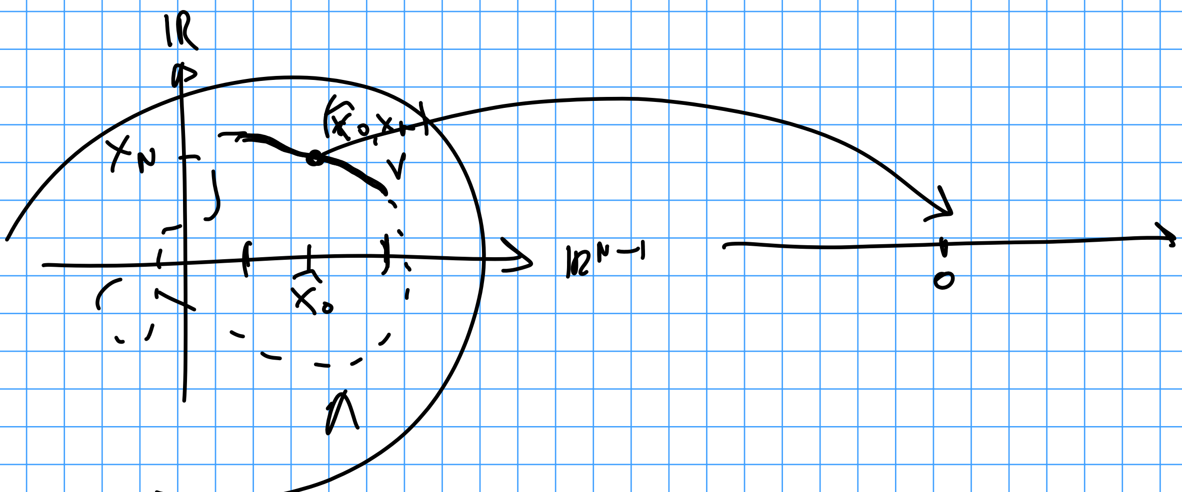
Se per esempio $k = N$ (l'ultima coordinata)

So che $\frac{\partial G}{\partial x_N}(x_0) \neq 0$; scrivo $x = (\hat{x}, x_N)$.

TROVO $\rho > 0$ e una funzione $f : B(\hat{x}_0, \rho) \to \mathbb{R}$

t.c. vicino a x_0

$$\{ x : G(x) = 0 \} = \{ (\hat{x}, f(\hat{x})) : \hat{x} \in B(x_0, \rho) \}$$



VICINO A x_0 posso descrivere V come grafico di una funzione $x_N = f(\hat{x})$ (CASO $k = N$)

$$\Big(x_k = f(\underbrace{x_1 \dots x_{k-1}, x_{k+1} \dots x_N}_{\hat{x}}) \quad \text{caso generale} \Big)$$

SI ESPLICITA LA COORDINATA K-ESIMA (quella t.c. $\frac{\partial G}{\partial x_k}(x_0) \neq 0$) in termini delle altre

$(x_1 \dots x_{k-1}, f(\hat{x}), x_{k+1} \dots x_N)$

INOLTRE VALE LA FORMULA

$i \neq k$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x}) = - \frac{\frac{\partial G}{\partial x_i}(\hat{x}, f(\hat{x}))}{\frac{\partial G}{\partial x_k}(\hat{x}, f(\hat{x}))}$$

#

CONFRONTIAMO QUESTO TEOREMA CON LA SFERA ..

$$S = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} \qquad \left(= \{ P \in \mathbb{R}^3 : G(P) = 0 \} \right)$$

IN QUESTO CASO $N = 3$, $A = \mathbb{R}^3$, $G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

VERIFICO CHE VALGONO LE IPOTESI

$$\nabla G(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla G(P) = \vec{0} \iff P = (0,0,0) = \vec{0}$$

MA $G(\vec{0}) = -1 \neq 0$

→ NON CI SONO PUNTI $P \in S$ SU CUI $\nabla G(P) = 0$

L'IPOTESI VALE !!

PAUSA → 18.35

Prendiamo un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. So che

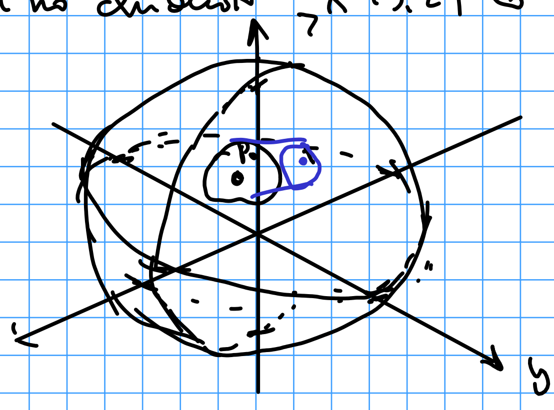
$$\nabla G(P_0) = 2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Sicuramente una delle coordinate non è nulla.

Se $x_0 \neq 0$ il teorema mi dice che

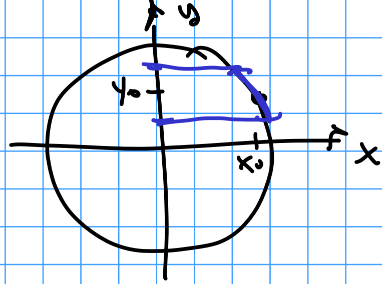
vicino a P_0 S si descrive come $\{ (x(y,z), y, z) \text{ con } (y,z) \in B((y_0,z_0), \rho) \}$

(ho chiamato $x(y,z)$ la funzione implicita che si chiama g nel teorema)



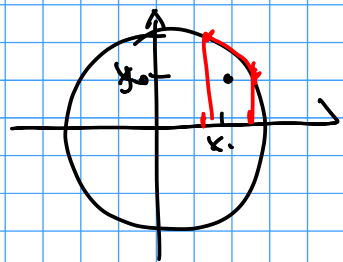
se $x_0 \neq 0$ posso "proiettare" un intorno di $P^0 \cap S$ sul piano $y,z)$ e vedere S come grafico di una funzione $x(y,z)$

Se fossi in $N = 2$ $\quad G(x,y) = x^2 + y^2 - 1$



$\leftarrow$ esplicito $x(y)$ per $y \simeq y_0$

perché $\frac{\partial G}{\partial x}(P_0) \neq 0$



$\leftarrow$ esplicito $y(x)$ per $x \simeq x_0$

(perché $\frac{\partial G}{\partial y}(P_0) \neq 0$)

. Se invece so che $\frac{\partial G}{\partial y}(P_0) \neq \vec{0}$

posso descrivere S, vicino a P_0, come

$$\{(x, y(x,z), z) \; : \; (x,z) \simeq (x_0, z_0)\}$$

. Se ancora $\frac{\partial G}{\partial z}(P_0) \neq \vec{0} \Rightarrow$

vicino a P_0 $\quad S = \{(x, y, z(x,y)) \quad (x,y) \simeq (x_0, y_0)\}$

NEL CASO DELLA SFERA È OVVIO CHI SONO QUESTE FUNZIONI!

Se per esempio $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ con $x_0 > 0$

$\Rightarrow$ posso scrivere $S = \{(\underbrace{\sqrt{1-y^2-z^2}}_{x(y,z)}, y, z), \; (y,z) \simeq (y_0, z_0)\}$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y}(y,z) = \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2-z^2}} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}} = -\frac{y}{x(y,z)}$$

TORNA CON L'ENUNCIATO DEL TEOREMA CHE DICE

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = \left(-\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,z)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial G(x,y,z)}{\partial y}$$

dove $x = f(x,y)$

Per esempio $\boxed{P_0 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1\right)$

$x_0 = \frac{1}{2} \neq 0 \qquad y_0 = -\frac{1}{2} \qquad z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(P_0) = 2x\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1$$

Il teorema mi dice che ricavo $x = x(y,z)$ e che

$$\frac{\partial x(y_0,z_0)}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial y}(P_0) \Big/ \frac{\partial G}{\partial x}(P_0) = -\frac{2y}{2x}\Big|_{\substack{x=\frac{1}{2}\\ y=-\frac{1}{2}}} = -1$$

IN ALTERNATIVA so che

$$x(y,z) = \sqrt{1-y^2-z^2} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2-z^2}}$$

metto $y = \frac{1}{2}$ $x = \frac{1}{2}$ $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}} =$

$$\frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{-1}{2\,\frac{1}{2}} = -1$$

NELLO STESSO MODO POSSO RICAVARE $\frac{\partial x}{\partial z}(\ldots)$

<u>NOTA</u> Se prendo ancora $P = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

dato che $z_0 \neq 0$ $\left(\frac{\partial G}{\partial z}(P) = 2z_0 \neq 0\right) \Rightarrow$ posso

ricavare $z = z(x,y)$. Il teorema mi dice che

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(P_0)}{\frac{\partial G}{\partial z}(P_0)} = -\left.\frac{2x}{2z}\right|_{\substack{x=1/2\\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\parallel$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

MA SO CHE $z(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

se metto $x=\frac{1}{2}$ $y=-\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\frac{-1/2}{\sqrt{1-1/4-1/4}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1/2}} =$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ESEMPIO

$$V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : e^{xy}+x-y=1\}$$

Pongo $G(x,y) = e^{xy}+x-y-1$ di modo che

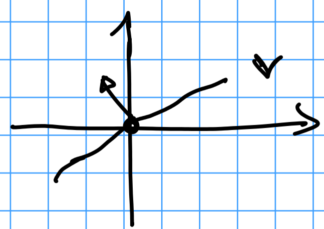
$$V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : G(x,y)=0\}$$

Noto che $(0,0)\in V$ perché $G(0,0)=e^0+0-0-1=0$

Vediamo $\nabla G(x,y) = \begin{pmatrix} y e^{xy}+1 \\ x e^{xy}-1 \end{pmatrix}$

$$\nabla G(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posso dire che "VICINO A $\vec{0}$" V si può descrivere come grafico di una $x(y)$ per $y\simeq 0$ OPPURE di un $y(x)$ per $x \simeq 0$

$\simeq$ 

Nel primo caso so che $\frac{\partial X}{\partial y}(y) \left(= X'(y)\right)\Big|_{y=0} = - \frac{\frac{\partial G}{\partial y}(0,0)}{\frac{\partial G}{\partial x}(0,0)}$

$= - \frac{-1}{1} = 1$

Nel secondo caso so che $\frac{\partial y(x)}{\partial x} \left(= y'(x)\right)\Big|_{x=0} = - \frac{\frac{\partial G}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial G}{\partial y}(0,0)}$

$= 1$