Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 26      24/11/20

email:  claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web:    http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

__Teorema di inversione locale__   $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto $x_0 \in A$

$f: A \to \mathbb{R}^N$ di classe $C^1(A)$. Se $\det\left(J_f(x_0)\right) \neq 0$

cioè se $J_f(x_0)$ è invertibile $\Longrightarrow$ esiste $\rho_0 > 0$ tale che

(a) $f$ è iniettiva su $\Omega := B(x_0, \rho_0)$;

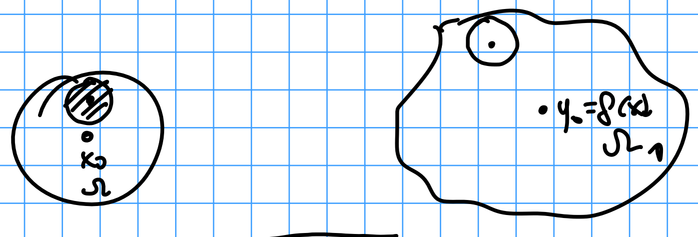
(b) $\Omega_1 := f(\Omega)$ è aperto;

(c) la funzione $f^{-1}$ che è ben definita da $\Omega_1 \to \Omega$ è di classe $C^1$ in $\Omega$ e vale

$$J_{f^{-1}}(y) = J_f(x) \qquad \text{dove } x \in \Omega \quad y = f(x) \in \Omega_1$$
$$= J_f(f^{-1}(y))$$

ABBIAMO DIM. (a) e (b). Riguardo a (c) notiamo che

(c.1) la $f^{-1}$ è continua perché – se guardo la dim vedo: fissato $x \in B(x_0, \rho_0)$ ho invertito $f$ su $\overline{B(x, \rho)}$ a valori in $\Omega_1$



e allora si può usare un teorema visto tempo fa che riguarda
$f: C \to \mathbb{R}^m$ con $C$ limitato e chiuso

(c.2) Una volta che ho $f^{-1}$ continua su $\Omega_1$ posso ragionare così: (1) prendo $y \in \Omega_1$ e $x \in \Omega$ t.c. $f(x) = y$

(2) So per ipotesi che $f$ è diff in $x$ $\iff$

$$f(x') = f(x) + J_f(x)(x' - x) + o(\|(x - x')\|)$$

Chiamo $y' = f(x')$ e $y = f(x)$ $\iff$
$x' = f^{-1}(y')$ $\quad x = f^{-1}(y)$

Riscrivo la formula usando le ultime due righe:

$$y' - y = \underbrace{J_f(f^{-1}(y))}_{\text{è invertibile}}\left(f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\right) + o\left(\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\|\right)$$

$$J_f(f^{-1}(y))^{-1}(y' - y) = f^{-1}(y') - f^{-1}(y) + \underbrace{J_f(f^{-1}(y))^{-1} o\left(\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\|\right)}_{\text{si vede che è } o(\|y - y'\|)}$$

$$\iff f^{-1}(y') = f^{-1}(y) + \underbrace{J_f(f^{-1}(y))^{-1}}(y' - y) + o(\|y' - y\|)$$

$\iff$ $f^{-1}$ è diff in $y$ e $J_{f^{-1}}(y) = J_f(f^{-1}(y))^{-1}$

FINE DIM. #

---

**ESEMPIO** Considero $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

$f(0,0) = (0,0)$ $\quad f(1,1) = (2,2)$.

Calcoliamo la matrice Jacobiana di $f$ in $(x,y)$

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2y \end{bmatrix} \Rightarrow \det\big(J_f(x,y)\big) = 4(y^2-x^2)$$

è diverso da zero $\Leftrightarrow$ $y \neq x$ e $y \neq -x$.

FUORI DA QUESTE DUE RETTE $f$ è "localmente" invertibile

$\simeq$ se $(x_0,y_0)$ non verifica $|x_0|=|y_0|$ $\Rightarrow$ esiste $\rho_0 > 0$ tale che la restrizione di $f$ a $\{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2<\rho_0\}$ è invertibile e vale la formula (...).

Per esempio consideriamo il punto $P_0 = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (non è nella zona proibita)

$\Rightarrow$ vicino a $P_0$ $f$ è invertibile. Inoltre (per esempio)

$$J_{f^{-1}}\big(f(P_0)\big) = J_f(P_0)^{-1}$$

(potrei mettere $P$ vicino a $P_0$)

Chi è $f(P_0)$ ??

$$f(P_0) = \left(2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}, (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \left(2, 2+\frac{1}{2}\right) = \left(2, \frac{5}{2}\right)$$

$$J_{f^{-1}}(2, 5/2) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2y \end{bmatrix}^{-1}\Bigg|_{x=\sqrt{2},\, y=\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$\begin{bmatrix} 2\frac{\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \frac{2\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \left(\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(verifica $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ torna)

$$J_{f^{-1}}\left(2, 5/2\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Vediamo in questo caso come è fatta effettivamente $f^{-1}$ (e come è fatto $f(\mathbb{R}^2)$ ...)

Il problema diventa: dato $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ posso trovare $(x,y)$ t.c. $f(x,y) = (\xi, \eta)$ (cerco $f(\mathbb{R}^2)$)

e quanti ne trovo ?? (se ce ne fosse uno solo $f$ sarebbe iniettiva)

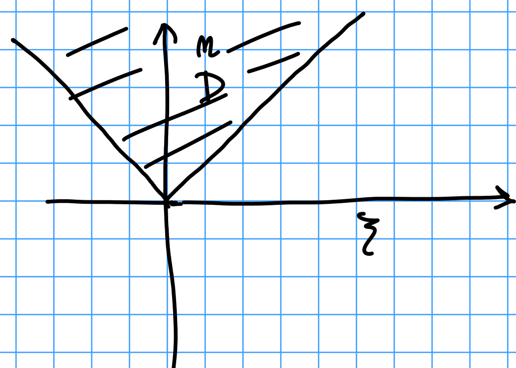
$$(SYS) \begin{cases} 2xy = \xi \\ x^2 + y^2 = \eta \end{cases}$$

per quali $(\xi, \eta)$ si può risolvere e quante soluzioni ha

Se $(SYS)$ ha soluzione $\Rightarrow$ $\eta \geq 0$ (EVIDENTE) e

$|\xi| \leq \eta$ perché $|\xi| = 2|x||y| \leq x^2 + y^2 = \eta$

CHIAMO $D = \{ |\xi| \leq \eta \}$




Sicuramente

$f(\mathbb{R}^2) \subset D$

Vediamo se, dato $(\xi, \eta) \in D$ riesco a risolvere $(SYS)$

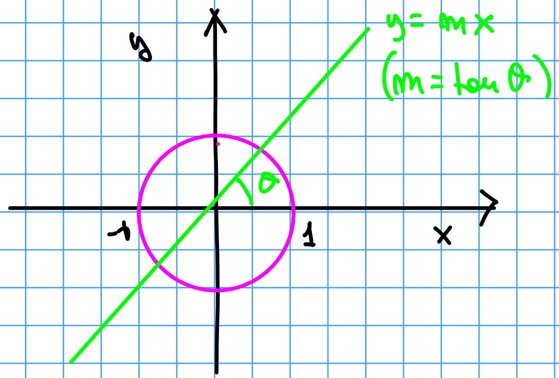
CONVIENE scrivere $(x,y)$ in coordinate polari

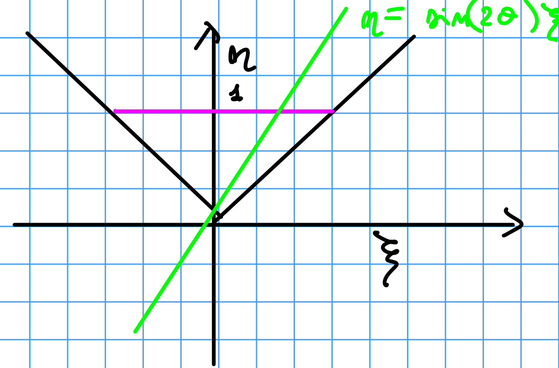
$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$$

Il sistema diventa

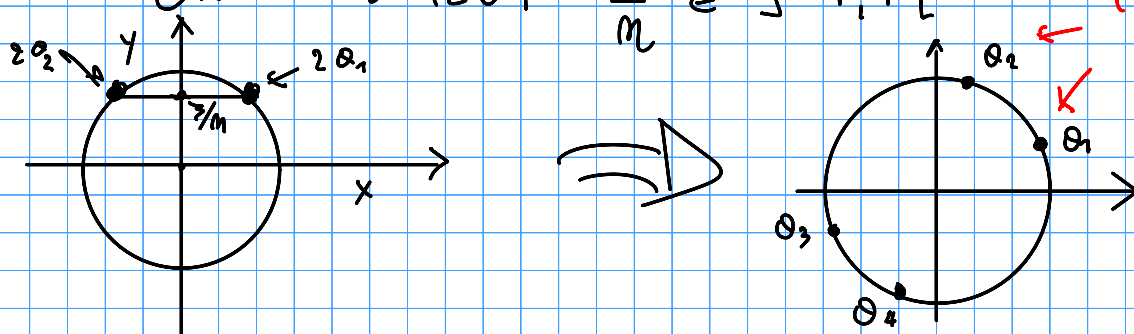
$$\begin{cases} 2\cos\theta\sin\theta = \xi/\eta \\ \rho^2 = \eta \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(2\theta) = \xi/\eta \\ \rho = \sqrt{\eta} \end{cases}$$

VEDIAMO COME SI LEGGE QUESTA ROBA



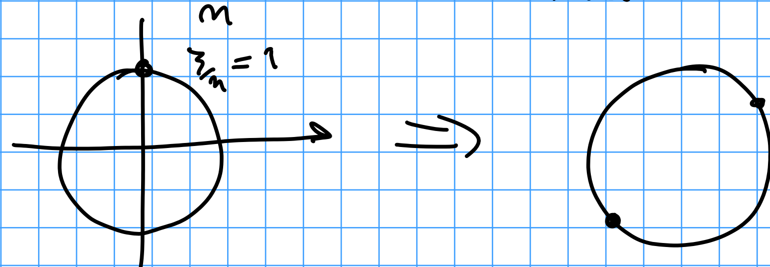




Vediamo che, dato $(\xi, \eta)$ con $\left|\frac{\xi}{\eta}\right| \neq 1$ ci sono quattro punti $(x, y)$ tali che $f(x,y) = (\xi, \eta)$. Infatti devo trovare $(x, y)$ sulla circonferenza di raggio $\sqrt{\eta}$ e tali che $\sin(2\theta) = \frac{\xi}{\eta} \in ]-1, 1[$ $\qquad$ $(x,y)$ e $(y,x)$

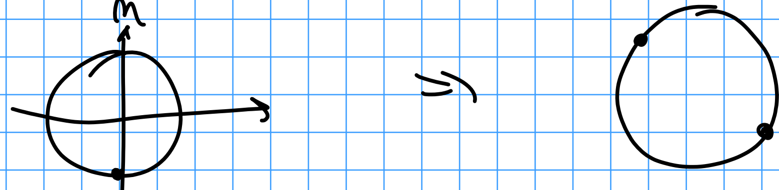


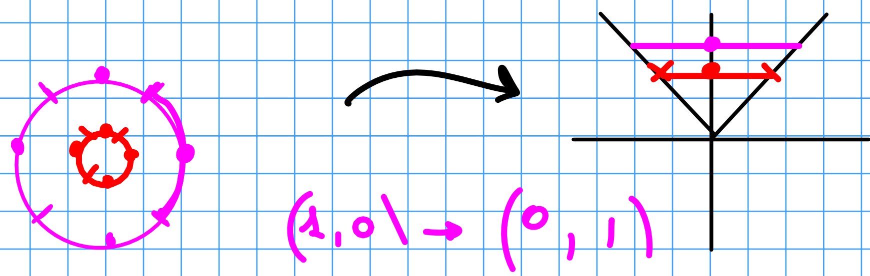

Noto che $f(x, y) = f(y, x)$ $\qquad$ se trovo uno dei punti
$f(-x, -y) = f(x, y)$ $\qquad$ li trovo tutti

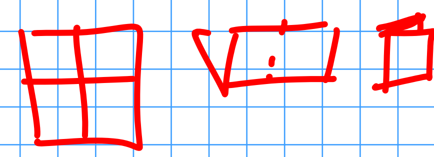
Se invece $\frac{\xi}{\eta} = 1$ $\qquad$ trovo



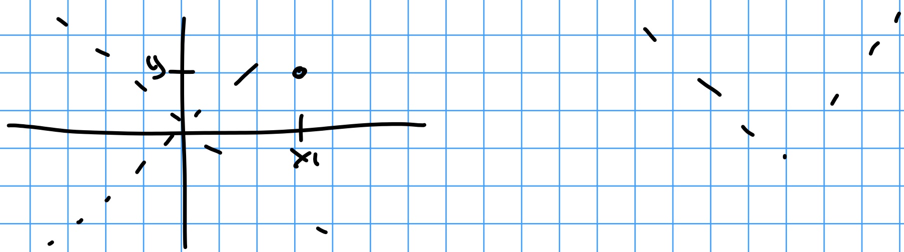

Se $\frac{\xi}{\eta} = -1$

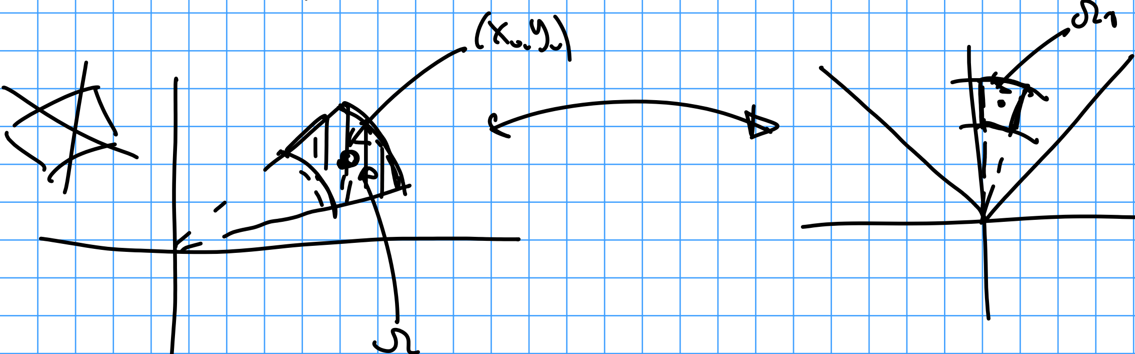




Si vede che se parto da $x_0, y_0$ che non verifica $|x_0| = |y_0|$ vicino a $(x_0, y_0)$ posso invertire $f$.




Possiamo calcolare $f^{-1}$: $\qquad (|\xi| \le \eta)$

$$\begin{cases} 2xy = \xi \\ x^2 + y^2 = \eta \end{cases} \qquad \begin{cases} \pm 2x\sqrt{\eta - x^2} = \xi \\ y = \pm\sqrt{\eta - x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2(\eta - x^2) = \xi^2 \iff 4x^4 - 4\eta x^2 + \xi^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{2\eta \pm \sqrt{4\eta^2 - 4\xi^2}}{4} = \frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \xi^2}}{2} \quad (>0)$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \xi^2}}}{\sqrt{2}}$$